福建省普通高校专升本招生统一考试

高等数学
真题题型总结

历年真题解法与命题风格分析

2006–2022	24	467
试卷年份	复习题型	真题题号

每章从一道真题入手，讲清如何选择方法、怎样写出关键步骤，再用同类题和延伸题练习。

从一道真题开始

2014 年第 11 题　求 $\sqrt{2-x}+\ln(x-1)$ 的定义域。

根号要求 $x \le 2$，对数要求 $x > 1$。两条条件同时成立，得到 $(1, 2]$。

目录

函数与极限

01 函数的定义域、值域、复合与同一性 3
02 函数性质与反函数 9
03 无穷小量及其阶的比较 15
04 极限的计算与存在性 20
05 连续性、间断点与分段参数 30

导数与应用

06 导数定义、分段点可导性与关系判断 36
07 显函数求导、高阶导数与微分 42
08 隐函数与参数方程求导 49
09 曲线切线与法线 55
10 单调性、极值与区间最值 60
11 曲线凹凸性与拐点 66
12 中值定理与不等式证明 72
13 方程实根、交点个数与参数范围 78

积分

14 原函数与不定积分 83
15 定积分性质与计算 91
16 变上限积分及其求导 99
17 广义积分的计算与敛散判定 105

空间几何

18 空间点坐标与向量运算 109
19 空间直线、平面及位置关系 115

微分方程

20 微分方程的阶数与类型识别 122
21 一阶微分方程的通解与特解 126
22 高阶微分方程的通解与特解形式 133

综合应用

23 定积分应用：面积、旋转体体积与质量 138
24 实际情境的最优化 150

附录

题型清单与真题对照 156
原文与答案待确认 215
逐页出处与覆盖检查 216

点击题型可跳转。正文题号按“年份 + 试卷题号”标注，汇编页码对应原照片。照片中难以辨认的符号标为“待确认”。

题型01：函数的定义域、值域、复合与同一性

1.1 思维导图与方法总览

根号和对数同时出现，端点能不能留？

2014 年第 11 题（汇编第 48 页，题意摘述）　求 $\sqrt{2-x}+\ln(x-1)$ 的定义域。

平方根的被开方数可以等于零，所以 $2-x\geq 0$，即 $x\leq 2$。对数的真数必须大于零，所以 $x-1>0$，即 $x>1$。

$$D=(1,2]$$

把 2 代回去，根号等于零，对数也有意义；把 1 代回去却出现了 $\ln 0$。这就是右端闭、左端开的原因。

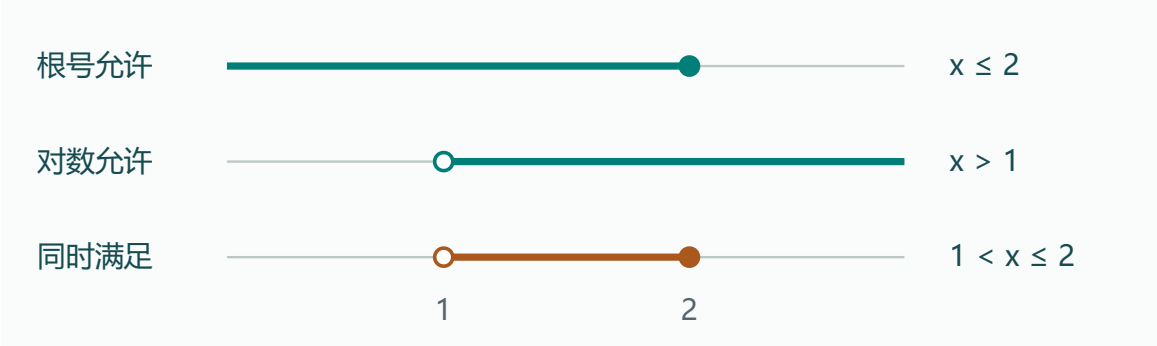

图 01-1　把两个限制画在同一条数轴上。从上往下看共同覆盖的部分：空心端点排除 1，实心端点保留 2。

同类题怎样选方法

本题型共 4 个方法。

函数的定义域、值域、复合与同一性
├ 01-1 定义域条件取交集
├ 01-2 分段或单调区间求值域
├ 01-3 由内向外代入
└ 01-4 核对定义域与对应关系

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

01-1 定义域条件取交集

什么时候用　式中有偶次根、分母、对数或反三角函数

1. 逐项写合法条件。
2. 解各不等式或去掉零点。
3. 取交集并逐个查端点。

用到的公式或定理　$\sqrt{u}$ 要 $u \geq 0$，$\ln u$ 要 $u > 0$，分母要非零，$\arcsin u, \arccos u$ 要 $-1 \leq u \leq 1$。

易错点　当整个分母是 $\sqrt{u}$ 时，要写 $u > 0$。若分母是 $1 + \sqrt{u}$，则 $u = 0$ 也合法。

对应真题　2022 年第 1 题、2020 年第 11 题、2019 年第 11 题、2016 年第 1 题。

01-2 分段或单调区间求值域

什么时候用　出现绝对值、分段或问所有可能输出

1. 按分界点或增减区间切段。
2. 求每段实际取到的值域。
3. 取并集并核对边界是否取得。

用到的公式或定理　$\mathrm{Ran}(f) = \bigcup_i f(D_i)$。

易错点　把端点极限误当作已取得的值。

对应真题　2021 年第 15 题。

01-3 由内向外代入

什么时候用　看到 $g(f(x))$、$f(f(a))$ 或待定占位式

1. 明确内层及合法输入。
2. 检查内层输出能否代入外层。
3. 代入并保留原定义限制。

用到的公式或定理　$D_{g\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$。

易错点　化简后忘记原式的禁点，或把内外层交换。

对应真题　2022 年第 11 题、2018 年第 11 题、2016 年第 11 题、2015 年第 1 题。

01-4 核对定义域与对应关系

什么时候用　题目比较两种写法是否为同一函数

1. 分别求定义域。
2. 在同一域上化简检查对应值。
3. 两个条件都成立才认定相同。

用到的公式或定理　$\sqrt{x^2} = |x|$，而 $\sqrt[3]{x^3} = x$。

易错点　公式表面相似不能代替域的核对。

对应真题　2014 年第 1 题、2011 年第 1 题、2010 年第 2 题、2009 年第 1 题。

1.2 核心概念与通俗解释

定义域　像是机器能收进去的全部材料。

使原表达式有意义的全部输入，限制应同时满足。 组合函数先逐层列条件。

容易出错的地方：只检查根式或只查分母。

值域　像机器实际能做出的产品清单。

在定义域内确实被取到的所有输出。 分段求各支值域并取并集。

容易出错的地方：把趋近但取不到的值算进去。

分段函数　看输入落在哪一格，就翻那一格的规则。

不同输入区间按不同表达式求值，等号属于题设指定分支。 计算复合时内层、外层可能落在不同分支。

容易出错的地方：分界点漏掉或算两遍。

复合与同一函数　一个机器的输出作为第二个机器的输入。

复合是先内再外；两函数相同须定义域和对应关系都相同。 换元后注明表达式适用范围。

容易出错的地方：约分后把被删的输入补回。

1.3 真题归类总结

本章共 23 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

定义域条件取交集（01-1）

2022 年第 1 题 • 汇编第 1 页　对数与分母根式的定义域

令 $x+3>0$、$2-x>0$，交集为 $(-3,2)$。

易错点：分母的根号内不能取零。

2020 年第 11 题 • 汇编第 12 页　$\ln\sqrt{4-x^2}$ 的定义域

对数真数必须为正，故 $4-x^2>0$，得 $(-2,2)$。

易错点：根号和对数条件要同时满足。

2019 年第 11 题 • 汇编第 18 页　$\sqrt{x}/\ln x$ 的定义域

由 $x\geq 0$、$x>0$ 和 $\ln x\neq 0$ 得 $(0,1)\cup(1,+\infty)$。

易错点：排除对数分母的零点 $x=1$。

2016 年第 1 题 • 汇编第 35 页　$1/\sqrt{x-1}+\ln(2-x)$ 的定义域

要求 $x-1>0$ 且 $2-x>0$，所以 $1<x<2$。

易错点：两端均开。

2014 年第 11 题 • 汇编第 48 页　$\sqrt{2-x}+\ln(x-1)$ 的定义域

求交集 $\{x\le 2\}\cap\{x>1\}=(1,2]$。

易错点：根号的端点可取，对数的端点不可取。

2013 年第 1 题 • 汇编第 53 页　有理项与 $\sqrt{4-x^2}$ 的定义域

先用 $4-x^2\ge 0$ 得 $[-2,2]$，再去掉有理项分母为零的 $x=2$，得 $[-2,2)$。

易错点：分别检查两端。

2012 年第 1 题 • 汇编第 59 页　$\arccos(x-4)$ 的定义域

$-1\le x-4\le 1$，故为 $[3,5]$。

易错点：用的是反余弦的输入范围。

2008 年第 2 题 • 汇编第 83 页　从选项找定义域 $[-1,1)$ 的函数

对 $\sqrt{(1+x)/(1-x)}$ 解根号内非负并排除 1，得所需区间。

易错点：分式不等式要分段看符号。

2007 年第 1 题 • 汇编第 89 页　$2\ln(1+2x)$ 的定义域

$1+2x>0$，得 $(-\frac{1}{2},+\infty)$。

易错点：对数外乘常数不改变定义域。

分段或单调区间求值域（01-2）

2021 年第 15 题 • 汇编第 6 页　$|x|+x$ 的值域

$x<0$ 时值为零，$x\ge 0$ 时为 $2x$，值域是 $[0,+\infty)$。

易错点：零能取到。

由内向外代入（01-3）

2022 年第 11 题 • 汇编第 2 页　$f(x)=\sqrt{1+x}$ 的二次复合

内层 $f(0)=1$，外层 $f(1)=\sqrt{2}$。

易错点：复合仍要检查外层定义域。

2018 年第 11 题 • 汇编第 24 页　$f(x)=\ln x$ 时求 $f(f(e))$

$f(e)=1$，$f(1)=0$。

易错点：函数值为零合法，零作为对数自变量才不合法。

2016 年第 11 题 • 汇编第 36 页　$f(x)=\sin x,\ g(x)=2+x^2$，求 $g(f(x))$

用 $\sin x$ 替换外层的自变量，得 $2+\sin^2 x$。

易错点：内外顺序不可交换。

2015 年第 1 题 • 汇编第 41 页　分段函数的复合 $f(f(2))$

$x=2$ 属于右支，$f(2)=1$。再用中间支求 $f(1)=0$。

易错点：等号要放进题设指定的一支。

2013 年第 11 题 • 汇编第 54 页　由 $f(x+2)=x(x+2)$ 求 $f(x-2)$

令 $u=x+2$，则 $f(u)=u(u-2)$。代 $u=x-2$ 得 $(x-2)(x-4)$。

易错点：外层变量替换后原式右边也要同步改。

2012 年第 11 题 • 汇编第 60 页　分段函数求 $f(x-1)$

分界从原输入 0 平移到 $x=1$。当 $x\geq 1$ 时得 $1/x$，当 $x<1$ 时得 $1/(1+e^{x-1})$。

易错点：分段条件也要替换。

2011 年第 11 题 • 汇编第 66 页　$f(x)=x/(x-1)$ 的嵌套复合

先算 $1/(f(x)-1)=x-1$，再算 $f(x-1)=(x-1)/(x-2)$。原复合要求 $x\neq 1,2$。

易错点：化简后仍保留 $x\neq 1$。

2007 年第 2 题 • 汇编第 89 页　三段函数与 $g(x)=e^x$ 作复合

先取 $f(x)$ 的三个输出 $1,0,-1$，代进 g 得 $e,1,e^{-1}$，对应 $|x|<1,=1,>1$。

易错点：边界单独一支，$f(g(x))$ 的分界由 e^x 决定。

2006 年第 11 题 • 汇编第 96 页　由 $f(1/x)=x/(x+1)$ 求 $f(2x)$

令 $u=1/x$ 得 $f(u)=1/(1+u)$（原等式确定 $u\neq 0,-1$）。代入得 $1/(1+2x)$。

易错点：若题面未补定义，原式无法单独确定 $f(0)$。

核对定义域与对应关系（01-4）

2014 年第 1 题 • 汇编第 47 页　四组函数中找同一函数

逐组比定义域与逐点值。$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 两边均定义于 $\mathbb{R}$；其余组有定义域不一致或 $\sqrt{x^2}=|x|$ 所致的差别。

易错点：约分和开平方可能改变原定义域或符号。

2011 年第 1 题 • 汇编第 65 页　$\sqrt{(x-1)/(x-2)}$ 与 $\sqrt{x-1}/\sqrt{x-2}$ 的共同定义

右式要求 $x>2$。在此范围左式合法且根式商可拆，因此选 $(2,+\infty)$。

易错点：根式商可以定义在两个分根式都无定义的地方。

2010 年第 2 题 • 汇编第 71 页　$\sqrt{x^2}$ 与 x 的相同范围

$\sqrt{x^2}=|x|$，两式在 $x\geq 0$ 逐点相同；最大范围为 $[0,+\infty)$。

易错点：含零。

2009 年第 1 题 • 汇编第 77 页　四组中识别相同函数

$\sqrt[3]{x^4-x^3}=\sqrt[3]{x^3(x-1)}=x\sqrt[3]{x-1}$，两边定义域均为实数。

易错点：实立方根可以处理负值。

1.4 反套路延伸题

延伸题 1　化简前的定义域

令 $F(x)=\ln\sqrt{(x^2-1)/(x-1)}$。求自然定义域，并判断它是否与 $G(x)=\frac{1}{2}\ln(x+1)$ 同一。

解题线索　根号在对数内部，整个根必须为正。

反套路点　约分后式子简单，但原来的分母禁点仍在。

解析　首先 $x\neq 1$。在此条件下被开方数为 $x+1$，须 $x>-1$。G 的定义域内有 $x=1$，且 $G(1)$ 有定义，所以相同的简式只在公共定义域成立。

答案　$D_F=(-1,1)\cup(1,\infty)$，两函数不同。

对应方法　01-1、01-3。

基于公开真题风格的推测　2022 年第 1 题叠加分母根式与对数限制，2014 年第 1 题同时核对定义域和函数值，这里将两种检查合在一起。

延伸题 2　复合以后，哪些值还能取到?

令 $f(x)=|x|-x$，$g(u)=u/(u-2)$。求 $g\circ f$ 的定义域和值域。

解题线索　先确定 f 的输出范围，然后在该范围内取外层的值。

反套路点　内层的输出只能是非负数，不能把外层完整值域照搬。

解析　f 在负半轴等于 $-2x$，在非负半轴等于 0。外层禁 $u=2$，故只去掉 $x=-1$。在 $0\leq u<2$，$g(u)=1+2/(u-2)$ 取 $(-\infty,0]$；在 $u>2$ 取 $(1,\infty)$。

答案　定义域 $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$，值域 $(-\infty,0]\cup(1,\infty)$。

对应方法　01-2、01-3。

基于公开真题风格的推测　2021 年第 15 题用绝对值分段求值域，2022 年第 11 题要求依次作复合，这里增加了禁值对可达输出的影响。

题型02：函数性质与反函数

2.1 思维导图与方法总览

知道输出，怎样倒推出输入?

2019 年第 1 题（汇编第 17 页，题意摘述）　求 $y=(x-1)/2$ 的反函数。

把输出暂记为 u。原式说输入减去 1 再除以 2 得到 u，倒推就是先乘 2 再加 1。

$$f^{-1}(u)=2u+1$$

例如输入 5 得到 2，再将 2 送入反函数，确实回到 5。

同类题怎样选方法

本题型共 4 个方法。

函数性质与反函数
├─ 02-1 从定义或取值范围检验有界性、周期性等性质
├─ 02-2 检查定义域对称并比较 $f(-x)$
├─ 02-3 查单射或分支单调性
└─ 02-4 交换变量并检查取值范围与图像对称

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

02-1 从定义或取值范围检验有界性、周期性等性质

什么时候用　要求判断有界、周期、增减等基本性质

1. 确认所问区间。
2. 按函数值范围、平移相等或两点次序逐条判。
3. 选用反例证伪。

用到的公式或定理　有界可写 $|f(x)|\le M$；周期需有 $T>0$ 使 $f(x+T)=f(x)$ 且定义域在该平移下保持。

易错点　局部性质不自动延伸到全域。

对应真题　2019 年第 2 题、2011 年第 2 题、2010 年第 1 题、2008 年第 1 题。

02-2 检查定义域对称并比较 $f(-x)$

什么时候用 题目有 $f(-x)$、绝对值或奇偶组合

1. 查定义域是否关于零对称。
2. 求 $f(-x)$。
3. 和原式及其相反数比较。

用到的公式或定理 偶为 $f(-x)=f(x)$，奇为 $f(-x)=-f(x)$。

易错点 零函数在对称域可同时为奇和偶。

对应真题 2008 年第 1 题、2007 年第 5 题、2006 年第 1 题。

02-3 查单射或分支单调性

什么时候用 同一个函数在多个区间中选可逆区间

1. 看是否重复取值。
2. 用严格单调或逐点证明单射。
3. 保留所选区间端点。

用到的公式或定理 单射条件 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$。

易错点 周期性不排除局部分支可逆。

对应真题 2021 年第 3 题。

02-4 交换变量并检查取值范围与图像对称

什么时候用 明确问反函数公式、图像或某个反函数值

1. 从 $y=f(x)$ 解出指定支的 x。
2. 换变量并交换定义域与值域。
3. 用复合或图像对应验算。

用到的公式或定理 $f^{-1}(f(x))=x$，图像互为关于 $y=x$ 的镜像。

易错点 $f^{-1}(x)$ 不是 $1/f(x)$。

对应真题 2020 年第 1 题、2019 年第 1 题、2018 年第 1 题、2017 年第 1 题。

2.2 核心概念与通俗解释

有界与周期 有界是走不出横向的上下护栏，周期是平移一段后图形重合。

有界要求绝对值有统一上界，周期要求图样按固定非零距离重复。 常用和值不等式或无穷远行为识别。

容易出错的地方：有界与周期互相推出。

奇偶性 偶函数像关于纵轴照镜子，奇函数像绕原点转半圈。

先有对称定义域，再看输入取反时输出同号或反号。 遇复合、乘积先对各因子代 $-x$。

容易出错的地方：只看幂次，忽略定义域。

单射 每个输出至多能追溯到一个输入。

不同输入不给同一输出。 在所选区间用严格单调快速确认反函数存在。

容易出错的地方：把严格单调当成判断单射的唯一方法。

反函数及主值 沿机器的操作倒着走，必须先指定从哪条路回去。

互逆映射交换输入输出；对多值反解须限制原函数分支。 先用原定义域选正确符号。

容易出错的地方：求平方的反函数时盲取正根。

2.3 真题归类总结

本章共 15 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

从定义或取值范围检验有界性、周期性等性质（02-1）

2019 年第 2 题 • 汇编第 17 页 $\cos x$ 缺少哪种题列性质

由 $|\cos x| \le 1$、$\cos(-x) = \cos x$ 和周期 2π，保留有界、偶和周期性；它在全实轴不单调。

易错点：区别全域与单个单调区间。

2011 年第 2 题 • 汇编第 65 页 指数函数在 $(-1, 1)$ 上的有界与单调性

指数 $2x + 1$ 随 x 增，且在 $(-1, 3)$ 内，故函数有界且严格递增。

易错点：定义域是题给区间。

2010 年第 1 题 • 汇编第 71 页 $\sin(x+1)/(1+x^2)$ 的性质

分子绝对值不超过 1、分母至少为 1，所以有界。趋远时趋零而函数不恒零，从而无周期；比较 $x, -x$ 排除奇偶两选项。

易错点：被平移的正弦不能直接沿用原奇偶性。

检查定义域对称并比较 $f(-x)$（02-2）

2008 年第 1 题 • 汇编第 83 页 限制在 $[-1, 2]$ 的 $2x^2 + e^{x^2}$

定义域不关于零对称，排除奇偶；例如 $f(-1) > f(0) < f(1)$，函数在整个区间非单调。 （配合 02-1）

易错点：表达式偶对称和受限函数的奇偶性要区分。

2007 年第 5 题 • 汇编第 89 页 三个奇函数的组合

令 $h(x) = f(x)[g(x) + \varphi(x)]$，因子同时变号，故 h 为偶函数。

易错点：奇乘奇为偶，奇加奇为奇。

2006 年第 1 题 • 汇编第 95 页 对任意 f 识别必为奇函数的构造

$xf(x^2)$ 在换 $x \mapsto -x$ 后外因子变号，内参 x^2 不变，故为奇函数。

易错点：“必为”要求任意允许的 f。

查单射或分支单调性（02-3）

2021 年第 3 题 • 汇编第 5 页 $\sin x$ 在哪个区间有反函数

在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 严格递增，每个输出只对应一个输入；其余所给区间发生重复。

易错点：周期函数可在合适的限制区间可逆。

交换变量并检查取值范围与图像对称（02-4）

2020 年第 1 题 • 汇编第 11 页 选择互为反函数的一对

解 $y = x^3$ 得 $x = \sqrt[3]{y}$，两者都覆盖实数域，互相复合回原变量。

易错点：反函数不是倒数。

2019 年第 1 题 • 汇编第 17 页 $y = (x-1)/2$ 的反函数

从 $y = (x-1)/2$ 解出 $x = 2y + 1$，互换命名得 $2x + 1$。

易错点：平移常数的符号。

2018 年第 1 题 • 汇编第 23 页 由原函数的定义域、值域求反函数定义域

反函数接收原函数的输出。题面原值域 $[1, 2)$ 即所求。

易错点：开放端点随值域一起保留。

2017 年第 1 题 • 汇编第 29 页 求 $f^{-1}(3)$

其含义为在 $x > 1$ 解 $2x/(x-1) = 3$，得 $x = 3$。

易错点：核对解属于限制支。

2016 年第 2 题 • 汇编第 35 页　函数与反函数图像的对称关系

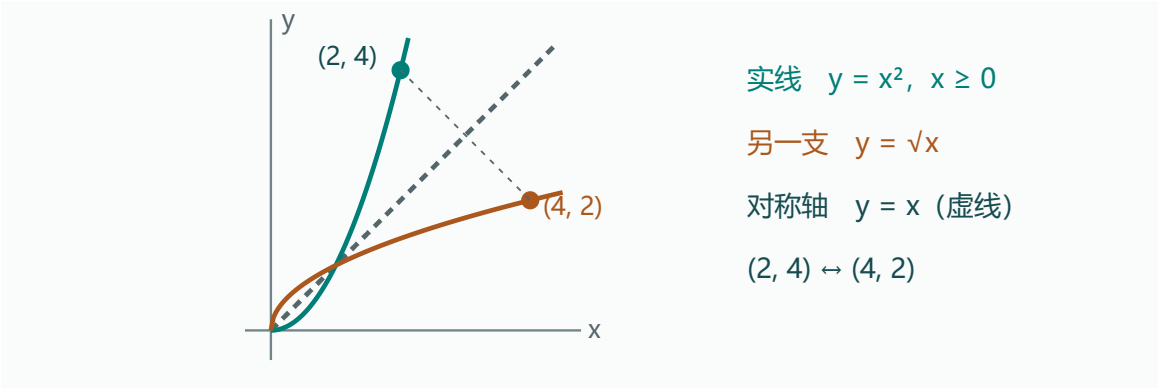

图 02-1　反函数图像交换横、纵坐标。用第一象限的平方函数作示例，沿虚线折叠，两个标出的点恰好重合。

点 (a,b) 对应 (b,a)，中点在 $y=x$ 且连线与之垂直，故关于 $y=x$ 对称。

易错点：不等同于奇偶性。

2010 年第 11 题 • 汇编第 72 页　$2+\ln(x+1)$ 的反函数

解 $y-2=\ln(x+1)$ 得 $x=e^{y-2}-1$，故反函数为 $e^{x-2}-1$，定义于全实数。

易错点：指数中的平移为减 2。

2008 年第 11 题 • 汇编第 84 页　由 $f(1/x)=x/(x+1)$ 求反函数

令 $u=1/x$ 得 $f(u)=1/(1+u)$。解 $y=1/(1+u)$ 得 $u=1/y-1$。题给等式本身确定的值域去掉 0、1。

易错点：未经补充不能从原式推定 $u=0$ 处的定义。

2007 年第 11 题 • 汇编第 90 页　$f(x)=(1-x)/(1+x)$ 的反函数复合

解 $y=(1-x)/(1+x)$ 发觉 $f^{-1}=f$。代入 $1/(1+x)$ 得 $x/(x+2)$，原表达式要排除 $x=-1,-2$。

易错点：内层有定义还须落入反函数定义域。

2.4 反套路延伸题

延伸题 1　负平方支的反函数

设 $f(x)=(x-2)^2+1$，$x\le 2$。求 $f^{-1}(5)$，再写反函数及其定义域。

解题线索　原函数在 $x\le 2$ 严格递减。

反套路点　开平方选负支，且反函数定义域从原值域来。

解析　$y-1=(x-2)^2$，原支使 $x-2\le 0$，故 $x=2-\sqrt{y-1}$，原值域为 $[1,\infty)$。令 $y=5$ 即得 0。

答案　$f^{-1}(x)=2-\sqrt{x-1}$，定义域 $[1,\infty)$，$f^{-1}(5)=0$。

对应方法　02-4、02-3。

基于公开真题风格的推测　2017 年第 1 题在限制支上求反函数值，2018 年第 1 题考查定义域和值域交换。

延伸题 2　偶对称的式子限制在一侧

设 $f(x)=x^2/(1+x^2)$，仅在 $[-1,2]$ 定义。判断奇偶性、单调性与是否有反函数。

解题线索　先查域，再用 $f(-1)=f(1)$ 和 $f(0)=0$。

反套路点　代入表达式看似是偶式，定义域却不对称。

解析　由于 2 在定义域而 -2 不在，函数既非奇也非偶。$f(-1)=1/2>f(0)=0<f(1)=1/2$，故整体非单调。又 $-1,1$ 取同一值，不能有整体反函数。

答案　既非奇也非偶，整体非单调，无反函数。

对应方法　02-2、02-1。

基于公开真题风格的推测　2008 年第 1 题把偶式放在不对称区间，2021 年第 3 题考查区间上的可逆性。

题型03：无穷小量及其阶的比较

3.1 思维导图与方法总览

两个量都趋于零，怎样比较快慢?

2021 年第 2 题（汇编第 5 页，题意摘述）　当 $x \to 0$ 时，比较 $1-\cos x$ 与 $\sin(x^2)$ 的阶。

两个量的极限都是零，直接比较极限看不出差别。把前者除以后者，利用 $1-\cos x \sim x^2/2$、$\sin(x^2) \sim x^2$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin(x^2)}=\frac{1}{2}$$

比值趋于非零常数，所以两者同阶。要称为等价无穷小，比值还须趋于 1。

同类题怎样选方法

本题型共 3 个方法。

> 无穷小量及其阶的比较
> ├─ 03-1 按趋近过程判断是否趋零
> ├─ 03-2 用比值极限判定阶
> └─ 03-3 用常用等价关系或主项比较

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

03-1 按趋近过程判断是否趋零

什么时候用　题目只问谁是无穷小

1. 标明趋向过程。
2. 求候选表达式的极限，必要时估计绝对值。
3. 挑出趋零者。

用到的公式或定理　$\alpha(x)$ 是无穷小当且仅当 $\alpha(x)\to 0$。

易错点　式子有正弦振荡时，先看它是否被更小量压住。

对应真题　2022 年第 2 题、2020 年第 2 题、2018 年第 12 题、2016 年第 3 题。

03-2 用比值极限判定阶

什么时候用 题目比较两个趋零量的阶

1. 选定谁与谁比较。
2. 求前者除以后者的极限。
3. 按 $0, 1$、非零常数或无穷分类。

用到的公式或定理 若 $\alpha/\beta \to 0$，则 $\alpha = o(\beta)$；趋 1 为等价。

易错点 把比值的方向写反。

对应真题 2021 年第 2 题、2015 年第 2 题、2013 年第 3 题、2012 年第 2 题。

03-3 用常用等价关系或主项比较

什么时候用 表达式含指数、对数、三角常见部件

1. 把内层量化为趋零变量。
2. 提取第一个非零主项。
3. 在乘除式中替换后核对系数。

用到的公式或定理 $\sin u \sim u$, $\ln(1+u) \sim u$, $e^u - 1 \sim u$, $1 - \cos u \sim u^2/2$。

易错点 减法有消项时，不能简单逐项替换。

对应真题 2019 年第 4 题、2017 年第 3 题、2014 年第 2 题、2009 年第 2 题。

3.2 核心概念与通俗解释

无穷小 随着输入靠近，输出可以变得任意接近零。

在指定趋向过程中极限为零。 用代入或夹逼判趋零。

容易出错的地方：觉得有一个很小的常数就叫无穷小。

阶与等价 不只看谁更快变小，也看同速时是否差个固定倍数。

看两个无穷小的比值；同阶为有限非零比，等价还要求比值恰好是 1。 通过主要幂次和系数分类。

容易出错的地方：把同阶非等价判成等价。

主项和消项 两个近似量相减时，共同部分可能完全消失。

首个尚未抵消的项控制近点的变化尺度。 如 $x - \sin x$ 应先用比值变形或更高阶信息。

容易出错的地方：遇差式只保留相同首项便给零答案。

3.3 真题归类总结

本章共 14 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

按趋近过程判断是否趋零（03-1）

2022 年第 2 题 • 汇编第 1 页　$x \to 0$ 时的无穷小识别

$|x\sin(1/x)| \le |x|$，所以该项趋零；另外三项分别趋 1、振荡无极限、趋 1。

易错点：有界乘趋零可趋零，振荡项本身未必有极限。

2020 年第 2 题 • 汇编第 11 页　判断 $x \to 0$ 的无穷小

在题列四项中，$x\sin x \to 0$；$\sin x/x \to 1$，$\cos x/x$ 不趋零，$1-\sin x \to 1$。

易错点：小量要按指定过程判断。

2018 年第 12 题 • 汇编第 24 页　求使 $1/(x-1)$ 成为无穷小的趋向过程

有限点处若有极限则不为零，趋于正无穷或负无穷时都趋零。

易错点：区分题目所需的单个例子与所有可行趋向。

2016 年第 3 题 • 汇编第 35 页　$x \to 0$ 的无穷小选项

$x^2 \to 0$；$x+2$、$(x+1)^2$ 和 2^x 均趋非零常数。

易错点：代入前检查表达式的连续性。

用比值极限判定阶（03-2）

2021 年第 2 题 • 汇编第 5 页　比较 $1-\cos x$ 与 $\sin(x^2)$

两者主项是 $x^2/2$ 与 x^2，比值趋 $1/2$，同阶但不等价。　（配合 03-3）

易错点：$\sin(x^2)$ 与 $(\sin x)^2$ 应按原记号识别。

2015 年第 2 题 • 汇编第 41 页　比较 $\tan 2x$ 与 x

$\tan 2x/x \to 2$，同阶非等价。　（配合 03-3）

易错点：同阶的比值可不等于 1。

2013 年第 3 题 • 汇编第 53 页　比较 $1-\cos x$ 与 $\tan x$

比值等价于 $(x^2/2)/x = x/2 \to 0$，所以前者高阶。　（配合 03-3）

易错点：分清谁作分子。

2012 年第 2 题 • 汇编第 59 页　比较 $x-\sin x$ 与 x

比值 $1-\sin x/x \to 0$，前者高阶。　（配合 03-3）

易错点：在差式中直接换成两个等价主项会丢失高阶信息。

2011 年第 3 题 • 汇编第 65 页　比较 $2^{x^2}-1$ 与 $(\arctan x)^2$

两者分别等价于 $(\ln 2)x^2$ 与 x^2，比值为 $\ln 2$，同阶非等价。　（配合 03-3）

易错点：指数的底数带来系数 $\ln 2$。

用常用等价关系或主项比较（03-3）

2019 年第 4 题 • 汇编第 17 页　找与 x 等价的量

$\tan x/x \to 1$。$1-\cos x$ 是二阶，$1-e^x$ 的首项为 $-x$。

易错点：不能丢掉首项符号。

2017 年第 3 题 • 汇编第 29 页　已知 $f(x)\sim 2/x$ 求 $\lim_{x\to\infty} xf(x)$

写成 $xf(x)=2\,[f(x)/(2/x)]$，故极限等于 2。

易错点：等价是在 $x\to\infty$ 时成立。

2014 年第 2 题 • 汇编第 47 页　选择与 x 等价的量

$\tan x$ 的首项是 x；其余给出的项主阶或首项系数不同。

易错点：$2^x-1\sim(\ln 2)x$。

2009 年第 2 题 • 汇编第 77 页　四组选等价无穷小

$\sin x/x\to 1$，其余组的比值趋零或非 1 的常数。

易错点：同阶并不自动等价。

2007 年第 3 题 • 汇编第 89 页　找与 x^2 等价的量

$(e^x-1)\sin x\sim x\cdot x=x^2$，根式差的首项是 $x^2/2$。

易错点：乘积可拆用等价，系数仍需保留。

3.4 反套路延伸题

延伸题 1　二阶里再藏一个二阶

当 $x \to 0$，比较 $1-\cos(\ln(1+x))$ 与 $(e^x-1)^2$ 的阶。

解题线索　两项最终都归到 x^2。

反套路点　外层余弦看似二阶，内层也要先检查趋零和系数。

解析　令 $u=\ln(1+x)\sim x$，则分子主项为 $u^2/2\sim x^2/2$。分母由 $e^x-1\sim x$ 得主项 x^2。比值趋 $1/2$。

答案　同阶但不等价。

对应方法　03-2、03-3。

基于公开真题风格的推测　2021 年第 2 题用二次主项区分同阶与等价，2011 年第 3 题在指数和反正切之间比较主系数。

延伸题 2　两项都振荡时的阶比较

设 $\alpha(x)=x^2\sin(1/x)$、$\beta(x)=x$。当 $x\to 0$，证明 α 是无穷小并判断相对阶。

解题线索　用 $|\sin(1/x)|\le 1$ 控住比值。

反套路点　比值本身仍含振荡，不能逐因子单独取极限。

解析　有 $|\alpha(x)|\le x^2$，故趋零。对 $x\neq 0$，$|\alpha(x)/\beta(x)|\le |x|$，比值也趋零。

答案　$\alpha=o(\beta)$，是比 β 高阶的无穷小。

对应方法　03-1、03-2。

基于公开真题风格的推测　2022 年第 2 题通过有界振荡乘小量识别无穷小，2012 年第 2 题通过比值判阶。

题型04：极限的计算与存在性

4.1 思维导图与方法总览

根式相减得到零，下一行怎么写?

2021 年第 18 题（汇编第 7 页，题意摘述） 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$。

代入得到 $0/0$。分子有两个相减的数，乘以它们的和就能用平方差公式，把妨碍约分的根号消掉。

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\quad(x\neq 0)$$

现在令 $x\to 0$，分母趋于 2，答案是 $1/2$。约分用的是零点附近的值。

同类题怎样选方法

本题型共 6 个方法。

```
极限的计算与存在性
├─ 04-1 直接代入与极限运算
├─ 04-2 约分有理化或提取主项
├─ 04-3 重要极限与等价替换
├─ 04-4 夹逼或有界量乘无穷小
├─ 04-5 洛必达及未定式转换
└─ 04-6 比较左右极限或用反例判存在
```

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

```
极限
├─ 适合直接代入 → 04-1
├─ 振荡项被趋零因子控制 → 04-4
├─ 两侧不同或要判存在 → 04-6
└─ 未定式
   ├─ 约分、通分、有理化 → 04-2
   ├─ 标准极限、等价替换或基本幂极限 → 04-3
   └─ 合规的商式且求导简化 → 04-5
```

读图时先写趋向点与代入结果，再按表达式的结构选择路径。同一道题可能先变形，再应用另一条分支。

04-1 直接代入与极限运算

什么时候用 都能正常代入，或已知组成项的有限极限

1. 先检查每项是否有极限。
2. 按和、积、商或连续函数复合运算。
3. 核对分母的极限不为零。

用到的公式或定理 $\lim(f/g)=(\lim f)/(\lim g)$ 要求 $\lim g\neq 0$。

易错点 代出 $0/0$ 说明需要继续变形。

对应真题 2018 年第 2 题。

04-2 约分有理化或提取主项

什么时候用 有公因式、根式差、无穷之差或无穷远有理式

1. 选约分、通分、有理化或同除最高次项。
2. 在去心邻域使式子等价。
3. 化简后取极限。

用到的公式或定理 $\sqrt{A}-\sqrt{B}=(A-B)/(\sqrt{A}+\sqrt{B})$ 在分母非零时可用。

易错点 等式变形必须保留相关范围。

对应真题 2022 年第 3 题、2021 年第 18 题、2020 年第 17 题、2017 年第 17 题。

04-3 重要极限与等价替换

什么时候用 看到 $\sin u/u$、含 $u\to 0$ 的标准块或 1^{∞}

1. 找共同小变量。
2. 改写出标准极限或乘除结构。
3. 检查主项系数再代回。

用到的公式或定理 $\lim_{u\to 0}\sin u/u=1$；若 $u\to 0$，$uv\to L$，则 $(1+u)^{v}\to e^{L}$（底数局部为正）。

易错点 趋向点不同可能得到完全不同的结果。

对应真题 2022 年第 12 题、2022 年第 17 题、2021 年第 4 题、2020 年第 3 题。

04-4 夹逼或有界量乘无穷小

什么时候用 有界振荡项乘趋零因子

1. 用绝对值给出统一上界。
2. 将这个界写为一个趋零量。
3. 用夹逼给结论。

用到的公式或定理 若 $|g|\leq M$ 且 $f\to 0$，则 $fg\to 0$。

易错点 不能把振荡因子的极限当成存在。

对应真题 2021 年第 12 题、2019 年第 3 题、2010 年第 12 题、2018 年第 4 题。

04-5 洛必达及未定式转换

什么时候用 已化为 $0/0$ 或 ∞/∞ 且求导会简化

1. 检查近点可导、分母导数及未定式类型。
2. 对分子分母分别求导。
3. 如仍为未定式，逐次检查条件后再用。

用到的公式或定理 满足洛必达法则条件且导数商有极限时，两商极限相同；幂式必要时先取对数。

易错点 导数商不收敛，不能凭此断言原商无极限。

对应真题 2019 年第 17 题、2018 年第 17 题、2008 年第 6 题、2008 年第 21 题。

04-6 比较左右极限或用反例判存在

什么时候用 两侧表达式不同，或题目问极限是否存在

1. 算左右极限或构造两列趋近。
2. 比是否都存在且相等。
3. 给出总极限或指出冲突。

用到的公式或定理 双侧有限极限存在等价于两个单侧有限极限相等。

易错点 点值与极限存在性是不同问题。

对应真题 2013 年第 2 题、2006 年第 2 题。

4.2 核心概念与通俗解释

去心邻域与单侧极限 看车怎样靠站，而不是车停在站里时是什么状态。

去心邻域排除目标点；单侧极限限制从左或从右靠近。 判断存在性或处理分段式。

容易出错的地方：用点值代替两侧趋势。

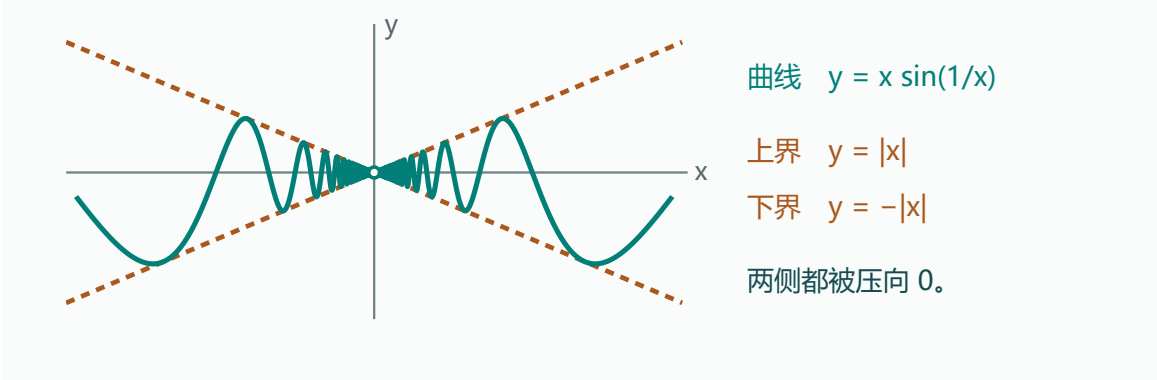

图 04-1 夹逼法的几何含义。示例中曲线始终夹在两条虚线边界之间；向原点靠近时，上、下界一起趋于零。

未定式 两股力量都在变化，得看哪一股变化更快。

只看各部分的极限无法决定组合极限，如 $0/0$、$\infty-\infty$、1^{∞}。 对应选通分、有理化、取对数或洛必达。

容易出错的地方：把符号 $0/0$ 当作答案或断定不存在。

等价替换　在足够靠近目标点时，两者相对大小几乎一样。

比值趋 1 的非零小量可在合适乘除式中互换。 先提取主因子，再计算余下因子极限。

容易出错的地方：在抵消性的和差中直接替换。

夹逼与洛必达　一个看边界夹住走势，一个看分子分母的变化率。

夹逼要求可比较的上、下界同趋一值；洛必达需确认为适用的商并检查导数商。 按结构选择分支。

容易出错的地方：对普通商盲目求导或忽略分母导数。

4.3 真题归类总结

本章共 42 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

直接代入与极限运算（04-1）

2018 年第 2 题 • 汇编第 23 页　已知 $\lim f=2, \lim g=1$ 求 $\lim(f+g)^2$

先用和的极限得 3，再用平方的连续性得 9。

易错点：括号作用于整个和。

约分有理化或提取主项（04-2）

2022 年第 3 题 • 汇编第 1 页　有理函数在无穷远的极限

分子分母同除以 x^2，余下首项比为 $2/4=1/2$。

易错点：先比次数再比系数。

2021 年第 18 题 • 汇编第 7 页　$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x^2}-1)/x^2$

用共轭分子有理化，化成 $1/(\sqrt{1+x^2}+1)$，得 $1/2$。　（配合 04-3）

易错点：约掉 x^2 只在去心邻域操作。

2020 年第 17 题 • 汇编第 13 页　分子分母同为三次的有理极限

分子分母同除以 x^3，最高次项系数相同，极限为 1。

易错点：只保留主项须在无穷远过程。

2017 年第 17 题 • 汇编第 30 页　$\lim_{x\to 1}(1/(x-1)-2/(x^2-1))$

通分得 $(x+1-2)/[(x-1)(x+1)]=1/(x+1)$，结果 $1/2$。

易错点：无穷之差先化为整体。

2015 年第 17 题 • 汇编第 42 页　$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/(1-\sqrt{1+2x})$

分母乘共轭后为 $-2x/(1+\sqrt{1+2x})\sim -x$，分子二阶，得 0。　（配合 04-3）

易错点：分母首项带负号。

2013 年第 21 题 • 汇编第 54 页　$\lim_{x\to 0}(1/x^2-\sin x/x^3)$

通分为 $(x-\sin x)/x^3$，洛必达一次得 $(1-\cos x)/(3x^2)$，再用 $1-\cos x\sim x^2/2$ 得 $1/6$。也可再求导，得 $\sin x/(6x)\to 1/6$。　（备用或配合 04-5）

易错点：不能分别求两个发散项再相减。

2012 年第 21 题 • 汇编第 60 页　$\lim_{x\to 0}(1/x-1/(e^x-1))$

通分成 $(e^x-1-x)/(x(e^x-1))$。两次求导后分子趋 1、分母趋 2，得 $1/2$。 同题出处另见 2009 年第 12 题。　（配合 04-5）

易错点：一次等价替换会丢掉首个非零项。

2009 年第 12 题 • 汇编第 78 页　$\lim_{x\to 0}(1/x-1/(e^x-1))$

与 **2012 年 / 册页 60 / 第 21 题** 共用本节解析。从整体识别 $\infty-\infty$ 型。　（配合 04-5）

易错点：从整体识别 $\infty-\infty$ 型。

2006 年第 21 题 • 汇编第 97 页　$\lim_{x\to 1}(x/(x-1)-1/\ln x)$

通分为 $(x\ln x-x+1)/[(x-1)\ln x]$，两次求导后得 $1/2$。　（配合 04-5）

易错点：不能在尚未消去发散项时单独替换 $\ln x$。

重要极限与等价替换（04-3）

2022 年第 12 题 • 汇编第 2 页　$\lim_{x\to\infty}(1-5/x)^{2x}$

取对数，$2x\ln(1-5/x)\to -10$，故得 e^{-10}。　（配合 04-5）

易错点：指数的因子 2 不能漏。

2022 年第 17 题 • 汇编第 2 页　$\lim_{x\to 0}\ln(1+2x^2)/(x\sin x)$

分子等价于 $2x^2$、分母等价于 x^2，故得 2。　（配合 04-5）

易错点：等价关系用在乘除整体。

2021 年第 4 题 • 汇编第 5 页　$\lim_{x\to 0}(1-6x)^{1/(2x)}$

取对数，$\ln(1-6x)/(2x)\to -3$，结果为 e^{-3}。　（配合 04-5）

易错点：核对底数在邻域内为正。

2020 年第 3 题 • 汇编第 11 页　$\lim_{x\to 0}(e^{2x}-1)/x$

乘除 $2x$ 或用 $e^{2x}-1\sim 2x$，得 2。　（配合 04-5）

易错点：保留内层倍数。

2020 年第 12 题 • 汇编第 12 页　由 $\lim(1+1/x)^{kx}=e^2$ 反求 k

把对数极限化为 $kx\ln(1+1/x)\to k$，比较指数，得 $k=2$。　（配合 04-5）

易错点：不同指数给出不同的正实数。

2019 年第 12 题 • 汇编第 18 页　$\lim_{x\to\infty}(1-2/x)^x$

对数为 $x\ln(1-2/x)\to -2$，指数还原得 e^{-2}。 同题出处另见 2014 年第 12 题。　（配合 04-5）

易错点：留意负系数。

2018 年第 4 题 • 汇编第 23 页　基本极限选项辨析

核对趋向点，$\lim_{x\to 0}\sin x/x=1$。题列其余项须分别按指数极限或夹逼检验。　（配合 04-4）

易错点：形式相似也要检查自变量的趋向。

2017 年第 2 题 • 汇编第 29 页　选择正确的数列极限

$1/2^n\to 0$。$(1+1/n)^2\to 1$，$\sin n/n\to 0$，且 $n/e^n\to 0$。　（配合 04-4）

易错点：正弦分母随 n 增大。

2016 年第 5 题 • 汇编第 35 页　辨析指数和正弦的基本极限

$\lim_{x\to 0}\sin x/x=1$。对指数候选先核对底数是否趋 1、指数是否趋无穷。

易错点：不能把不符条件的底数直接套 e。

2016 年第 17 题 • 汇编第 37 页　$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/(3x^2)$

用 $1-\cos x\sim x^2/2$，得 $1/6$。　（配合 04-5）

易错点：保留分母系数 3。

2015 年第 3 题 • 汇编第 41 页　四个指数极限选正确者

$\lim_{x\to\infty}(1+2/x)^x=e^2$，对数趋 2；其余候选的趋向点或幂指数不匹配。

易错点：先核对趋向点与底数范围。

2015 年第 12 题 • 汇编第 42 页　$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)/(x^2-1)$

分解为 $\sin(x-1)/(x-1)\cdot 1/(x+1)$，得 $1/2$。　（配合 04-2）

易错点：正弦小量是 $x-1$。

2014 年第 3 题 • 汇编第 47 页　辨别多个正弦极限

$\lim_{x\to\infty}x\sin(1/x)=1$，因为换元 $u=1/x$ 后为 $\sin u/u$。　（配合 04-4）

易错点：另一种 $x\to 0$ 的同形表达式由夹逼得零。

2014 年第 12 题 • 汇编第 48 页　$\lim_{x\to\infty}(1-2/x)^{x}$

与 **2019 年 / 册页 18 / 第 12 题** 共用本节解析。识别幂的底数趋 1。　（配合 04-5）

易错点：识别幂的底数趋 1。

2014 年第 17 题 • 汇编第 48 页　$\lim_{x\to0}(1-\cos x)/(1-e^{x})$

主项分别为 $x^{2}/2$ 与 $-x$，故极限为 0。　（配合 04-5）

易错点：二者虽都趋零，但阶数不同。

2013 年第 12 题 • 汇编第 54 页　$\lim_{x\to\infty}(1-2/(3x))^{3x}$

令 $u=3x$，还原为 $(1-2/u)^{u}$，极限为 e^{-2}。　（配合 04-5）

易错点：内外都按同一新变量改写。

2012 年第 12 题 • 汇编第 60 页　$\lim_{x\to0}\sin(kx)/x=3$

对 $k\neq0$ 用 $\sin(kx)/(kx)\to1$，极限为 k；$k=0$ 时原式为零。因此 $k=3$。

易错点：除以 k 之前要检查 $k=0$。

2011 年第 12 题 • 汇编第 66 页　$\lim_{x\to0}(1-2\tan x)^{3\cot x}$

对数为 $3\ln(1-2\tan x)/\tan x\to-6$，故得 e^{-6}。　（配合 04-5）

易错点：分开确认正底数和指数。

2011 年第 13 题 • 汇编第 66 页　$\lim_{x\to\infty}[x\tan(2/x)+\sin(x^{2})/x^{2}]$

首项为 $2\tan(2/x)/(2/x)\to2$，次项绝对值不超过 $1/x^{2}$，得 2。　（配合 04-4）

易错点：分别检查两项都有极限。

2009 年第 11 题 • 汇编第 78 页　由 $\lim_{x\to0}(1+5x)^{k/x}=e^{10}$ 求 k

取对数得 $5k=10$，所以 $k=2$。　（配合 04-5）

易错点：先取对数再比较指数。

2008 年第 12 题 • 汇编第 84 页　$\lim_{x\to0}(1-3x)^{1/x}$

对数极限为 -3，结果 e^{-3}。　（配合 04-5）

易错点：不能把幂极限当成常数幂直接代入。

2007 年第 12 题 • 汇编第 90 页　$\lim_{x\to0}(1+3x)^{2/x}$

对数极限为 6，结果 e^{6}。　（配合 04-5）

易错点：底数在零点邻域为正。

2006 年第 12 题 • 汇编第 96 页　$\lim_{x\to+\infty}(1-1/(4x))^{x-4}$

对数为 $(x-4)\ln(1-1/(4x))\to -1/4$，得 $e^{-1/4}$。　（配合 04-5）

易错点：指数的常数偏移不改变这个主极限。

夹逼或有界量乘无穷小（04-4）

2021 年第 12 题 • 汇编第 6 页　有界的 $\sin x$ 乘有理量

$|(x^3+1)\sin x/x^5|\le|(x^3+1)/x^5|\to 0$。

易错点：不要给 $\sin x$ 单独指定无穷远极限。

2019 年第 3 题 • 汇编第 17 页　四项判断基本极限

正确项是 $x\sin(1/x)\to 0$，由绝对值不超过 $|x|$ 得出。无穷远 $\sin x/x\to 0$，其余检查指数或夹逼。（配合 04-3）

易错点：区分 $\sin x/x$ 在零点和无穷远的不同极限。

2010 年第 12 题 • 汇编第 72 页　有理小量乘 $\sin(5/x)$

趋近 0 时有理因子 $(3x^2+5x)/(5x^2+3)$ 趋零，正弦有界，故乘积趋零。

易错点：不要求正弦本身收敛。

洛必达及未定式转换（04-5）

2019 年第 17 题 • 汇编第 18 页　$\lim_{x\to0}(e^x-x^2-x-1)/[x(e^x-1)]$

分子分母均趋零。两次求导后极限为 $(1-2)/(2+0)=-1/2$，故原极限相同。

易错点：减法中的一阶主项抵消。

2018 年第 17 题 • 汇编第 24 页　$\lim_{x\to0}(x-\sin x)/x^2$

洛必达化成 $(1-\cos x)/(2x)$，再用 $1-\cos x\sim x^2/2$，得 0。　（配合 04-3）

易错点：不能在未经变形的差式内直接把 $\sin x$ 换为 x。

2008 年第 6 题 • 汇编第 83 页　选择不能直接套洛必达的形式

选择的具体口径待确认。若题意是不能直接作为商使用，幂式须先取对数。另外题中 $(x-\sin x)/(x+\sin x)$ 的导数商也没有极限，且分母导数在无穷远反复为零。其原极限把分子分母同除以 x 即得 1。（配合 04-3）

易错点：若“不能使用”被解释为严格定理条件，选项表述待确认，见评注。

2008 年第 21 题 • 汇编第 84 页　$\lim_{x\to+\infty} x(\pi/2-\arctan x)$

对 $x>0$ 用 $\pi/2-\arctan x=\operatorname{arctan}(1/x)$，结果为 1。备用可改写成商再用洛必达。　（备用或配合 04-3）

易错点：反正切恒等式有分支条件。

比较左右极限或用反例判存在（04-6）

2013 年第 2 题 • 汇编第 53 页　在一点有定义与极限存在的条件关系

以 $f(x)=\sin(1/x)$ 并赋 $f(0)=0$ 反驳充分性；以只在 $x\neq 0$ 定义的常函数反驳必要性。故二者互不蕴含。

易错点：极限观察去心邻域。

2006 年第 2 题 • 汇编第 95 页　四个候选极限中找有限存在者

$x(x+1)/x^2=1+1/x$ 在题给的无穷远处趋 1。其余候选用两侧极限或发散判断。　（配合 04-2）

易错点：按有限实数极限理解题中“存在”。

4.4 反套路延伸题

延伸题 1　消掉一次之后仍需比较

求 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$。

解题线索　先通分化成商，然后检查 $0/0$。

反套路点　两个发散项相减，一阶等价会把分子主项吃掉。

解析　通分为 $[x-\ln(1+x)]/[x\ln(1+x)]$。一阶求导后分子为 $x/(1+x)$，分母为 $\ln(1+x)+x/(1+x)$。二者各除 x 得 $1/(1+x)$ 和 $\ln(1+x)/x+1/(1+x)$，极限为 $1/2$。

答案　$1/2$。

对应方法　04-2、04-5。

基于公开真题风格的推测　2012 年第 21 题和 2006 年第 21 题都要求先合并两个发散项，再看较高阶的变化。

延伸题 2　双侧贴近的不同答案

求 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{|x|}{x}+x\sin(1/x)\right)$，并给左右极限。

解题线索　先夹逼第二项，然后分别处理第一项。

反套路点　振荡项虽然显眼，真正造成两侧不等的是绝对值商。

解析　第二项绝对值不超过 $|x|$。第一项左侧恒 -1，右侧恒 1，相加后保留这两个单侧值。

答案　左极限 -1、右极限 1，双侧极限不存在。

对应方法　04-6、04-4。

基于公开真题风格的推测　2019 年第 3 题考查有界振荡乘小量，2006 年第 2 题要求区分极限存在与否。

题型05：连续性、间断点与分段参数

5.1 思维导图与方法总览

约掉分母后，原函数在这一点有值吗?

2022 年第 4 题（汇编第 1 页，题意摘述）　判断 $f(x)=(x-1)/(x^2-1)$ 在 $x=1$ 的间断类型。

在 1 附近取 $x\neq 1$，分母可分解为 $(x-1)(x+1)$。约分后，左右两侧的函数值都趋向同一个数。

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

原式在 1 处分母为零。给该点补上函数值 $1/2$ 就能接平，因此它是可去间断点。

同类题怎样选方法

本题型共 3 个方法。

```
连续性、间断点与分段参数
├─ 05-1 用连续条件定位连续区间或求点值
├─ 05-2 化简并比较两侧极限以判间断类型
└─ 05-3 按分段衔接条件反求参数
```

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

```
左侧趋势 f(a−) ──→ 连续时三者同值 ←── 右侧趋势 f(a+)
                          ↑
                   实际赋值 f(a)
```

读图时先分别得到三项，再看它们是否相等。左右极限不同时，用点值补不出连续。

05-1 用连续条件定位连续区间或求点值

什么时候用　问某点、某区间是否连续，或已知极限要点值

1. 确认点值和适用定义域。
2. 算需要的单侧或双侧极限。
3. 和点值比，或用初等函数的连续区间。

用到的公式或定理　f 在内点连续要求 $f(a-)=f(a+)=f(a)$。

易错点　写了点值还要验证确实是极限。

对应真题　2017 年第 11 题、2015 年第 11 题、2011 年第 4 题、2009 年第 22 题。

05-2 化简并比较两侧极限以判间断类型

什么时候用 看到分母零点或三角振荡

1. 在定义域闭包寻找疑点。
2. 比较左右极限并检查是否有限。
3. 按可去、跳跃、无穷或振荡判型。

用到的公式或定理 左右有限且相等而点值失配为可去；左右都有限但不同为跳跃。

易错点 约分后仍需保留原式的禁点。

对应真题 2022 年第 4 题、2021 年第 1 题、2018 年第 3 题、2016 年第 4 题。

05-3 按分段衔接条件反求参数

什么时候用 题目要求分段点连续时的参数

1. 找含等号的一支。
2. 分别把左右极限化简到参数式。
3. 令三者相等并验算。

用到的公式或定理 常用 $\sin u/u \to 1$、$(e^u-1)/u \to 1$ 及根式的有理化。

易错点 每个分界点要独立列条件。

对应真题 2022 年第 18 题、2021 年第 21 题、2020 年第 18 题、2019 年第 18 题。

5.2 核心概念与通俗解释

初等函数的连续性 公式在允许区间内平滑接上，仍要检查边界。

常见初等函数在自然定义域的内部连续，端点依相对定义域判断。 先处理不合法点，再处理拼接点。

容易出错的地方：认为整条数轴都连续。

可去与跳跃间断 一个像图上缺一个点，一个像两段台阶高度不一样。

可去时两侧有共同有限极限，跳跃时两侧有限但值不同。 比较两侧极限是否相等。

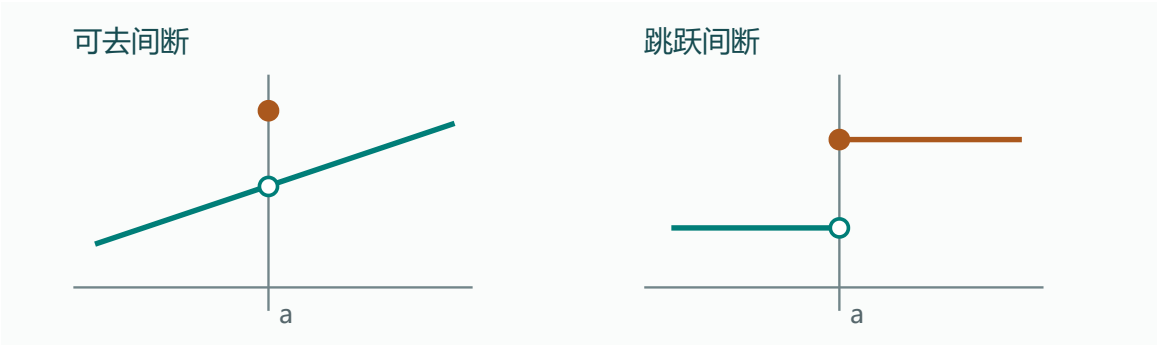

图 05-1 两侧靠近同一高度，还是各到一层。在 a 的左右沿曲线走：左图可把点值移回空圈处，右图改一个点也接不上两层。

容易出错的地方：把改变单点值当成能修好跳跃。

无穷与振荡间断 一类越走越远，一类来回摆不止。

至少一侧无穷发散或无限摆动得不到有限极限，具体按原式区分。 零分母看主项，$\sin(1/x)$ 可沿两列测试。

容易出错的地方：认为有界就必有极限。

分段衔接 左右两条路要在同一点会合。

在分界点同时比较点值及左右极限，条件也可反求参数。 含多个参数时保留全部必要方程。

容易出错的地方：把不含等号的一支直接当点值。

5.3 真题归类总结

本章共 26 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

用连续条件定位连续区间或求点值（05-1）

2017 年第 11 题 • 汇编第 30 页 已知在 x_0 连续且极限为 3

连续定义给出 $f(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(x)=3$。

易错点：有极限与点值等于极限缺一不可。

2015 年第 11 题 • 汇编第 42 页 $\ln(1-x^2)$ 的连续区间

真数大于零给 $-1<x<1$，区间内由连续函数复合而连续。

易错点：端点处对数无定义。

2011 年第 4 题 • 汇编第 65 页 极限存在是不是连续的必要条件

连续必有极限。去心处恒为 0 而点值为 1 的函数有极限却不连续，因此仅必要。

易错点：避免把必要方向倒置。

2009 年第 22 题 • 汇编第 79 页 含振荡项和对数商的三支函数

左边的 $x\sin(1/x)\to 0$，故左极限为 2；右边 $\ln(1+2x)/x\to 2$。两者都等于点值 2，所以连续。

易错点：三项分别核对。

化简并比较两侧极限以判间断类型（05-2）

2022 年第 4 题 • 汇编第 1 页 $x=1$ 对 $(x-1)/(x^2-1)$ 的间断类型

在 $x\neq 1$ 的邻域约分成 $1/(x+1)$，极限 $1/2$ 存在而原函数在点上无定义，故为可去间断点。

易错点：约分未补定义。

2021 年第 1 题 • 汇编第 5 页 $(x^2-4)/(x-2)$ 在 $x=2$ 的间断类型

去心邻域化为 $x+2$，极限 4，原式在 2 无定义，故为可去间断点。

易错点：区分补点后的函数。

2018 年第 3 题 • 汇编第 23 页　有理函数的所有间断点

$(x+2)(x-1)/[(x-1)(x-5)]$ 的原分母在 $1,5$ 为零；1 可去，5 无穷间断。

易错点：约分只消去极限运算中的因子。

2016 年第 4 题 • 汇编第 35 页　$(x-5)/(x^2-4)$ 的间断点个数

分母在 $x=\pm 2$ 为零，分子在两点均不为零，所以有两个间断点。

易错点：分子零点 5 不会导致间断。

2013 年第 4 题 • 汇编第 53 页　$\cos(1/x)$ 在零点的间断

沿 $1/x=2n\pi$ 与 $1/x=(2n+1)\pi$ 得不同极限值 $1,-1$，故为振荡间断。

易错点：有界不保证收敛。

2011 年第 21 题 • 汇编第 67 页　三段函数在零点的连续性与间断类型

左支 $1-e^{1/x}\cos(1/x)\to 1$，右支 $1+\arctan(1/x)\to 1+\pi/2$。点值为 1，两有限单侧极限不等，故跳跃间断。　（配合 05-1）

易错点：右边的反正切趋 $\pi/2$。

2009 年第 3 题 • 汇编第 77 页　$(x^2-1)/(x^2-3x+2)$ 在 $x=1$ 的间断类型

约去 $x-1$ 后趋 $(1+1)/(1-2)=-2$，原式在 1 无定义，故为可去。

易错点：此题问 1，另一个分母零点不影响此处的类型。

2008 年第 13 题 • 汇编第 84 页　$\sqrt{x+2}/(x^2+4x+3)$ 的间断点

先要求 $x\geq -2$，再排查分母零点 $-3,-1$。只有 -1 在可接近的范围内，且分子非零。

易错点：-3 位于自然定义域闭包之外。

2007 年第 13 题 • 汇编第 90 页　$1/(1-e^{x/(1+x^2)})$ 的间断点

$e^u=1$ 当且仅当 $u=0$，而 $x/(1+x^2)=0$ 仅在零点。分母趋零、分子恒为 1。

易错点：指数分母中的 $1+x^2$ 恒正。

按分段衔接条件反求参数（05-3）

2022 年第 18 题 • 汇编第 3 页　分段函数在零点连续求 a

左支 $2a+x$ 的左极限和点值均为 $2a$；右支 $x/(\sqrt{1+x}-1)=\sqrt{1+x}+1$ 的右极限为 2，故 $a=1$。（配合 05-1）

易错点：点值取自含等号的一支。

2021 年第 21 题 • 汇编第 9 页　用指数商衔接分段点

非零支 $(e^x-1)/x\to 1$，点值 $2k+1$ 必须等于 1，得 $k=0$。　(配合 05-1)

易错点：分段点值不可写成原商。

2020 年第 18 题 • 汇编第 13 页　根式分段函数在 $x=1$ 连续

化简 $(x-1)/(\sqrt{x}-1)=\sqrt{x}+1$，极限为 2，故 $a=2$。　(配合 05-2)

易错点：先约分再取极限。

2019 年第 18 题 • 汇编第 19 页　含正弦差商的连续性

把 $\sin(x-2)/(x^2-4)$ 拆为 $\sin(x-2)/(x-2)\cdot 1/(x+2)$，极限 $1/4$。令 $a-3/4=1/4$，得 $a=1$。　(配合 05-1)

易错点：分母的另一因子在分界点趋 4。

2017 年第 12 题 • 汇编第 30 页　正弦分支与二次分支在全实轴连续

左极限 $\sin(ax)/x\to a$，右极限和点值为 2，得 $a=2$。各开区间内两支连续。　(配合 05-1)

易错点：$a=0$ 仍可直接求左极限。

2016 年第 12 题 • 汇编第 36 页　线性式与常数拼接

右极限为 2，左极限与点值为 $2a$，故 $a=1$。　(配合 05-1)

易错点：保持 $x=0$ 所属支。

2015 年第 18 题 • 汇编第 43 页　$(x^2+ax)/\sin x$ 与点值 2

写成 $(x+a)(x/\sin x)\to a$，令 $a=2$。　(配合 05-1)

易错点：$k\pi$ 的其他禁点不影响零点的局部判断。

2014 年第 18 题 • 汇编第 49 页　指数分支和单点值 1 的拼接

指数因子在零点趋 1，去心极限为 a，所以 $a=1$。　(配合 05-1)

易错点：孤立赋值不能改变去心极限。

2013 年第 22 题 • 汇编第 55 页　三段式连续求 a,b

右支 $x^3\sin(1/x)$ 由夹逼趋零，左支 $a+e^x$ 趋 $a+1$。令两边同为点值 b，得 $(a,b)=(-1,0)$。　(配合 05-1)

易错点：要列两条相等条件。

2010 年第 21 题 • 汇编第 72 页　$k-e^x$ 与 $3x+1$ 拼接

右极限 $k-1$，左极限和点值 1，故 $k=2$。　(配合 05-1)

易错点：左侧取题给含等号的线性支。

2008 年第 3 题 • 汇编第 83 页　对数商与点值 2 的拼接

$\ln(1+ax)/x \to a$，由连续得 $a=2$。　（配合 05-1）

易错点：固定 a 后在足够小的邻域有 $1+ax>0$。

2007 年第 28 题 • 汇编第 93 页　$\sin x/x$ 与 $a+x$ 拼接

左极限 1，点值和右极限均为 a，所以 $a=1$。　（配合 05-1）

易错点：不能直接把零代入 $\sin x/x$。

2006 年第 3 题 • 汇编第 95 页　$(1-e^{ax})/x$ 与点值 1 拼接

去心极限 $-a$，连续要求 $-a=1$，得 $a=-1$。　（配合 05-1）

易错点：保留分子开头的负号。

5.4 反套路延伸题

延伸题 1　一个参数决定可去还是跳跃

设 $x<0$ 时 $f(x)=a\sin(2x)/x$，$x>0$ 时 $f(x)=(\sqrt{1+3x}-1)/x$，且 $f(0)=b$。求连续条件，并判 $a=0,b=3/2$ 时的间断类型。

解题线索　先对左边用基本极限，对右边乘共轭。

反套路点　点值设置正确也可能仍然跳跃。

解析　左极限 $2a$，右极限 $3/2$。连续须 $2a=b=3/2$。另给条件时两侧分别为 $0,3/2$，虽点值等于右极限，仍为跳跃。

答案　$a=3/4,b=3/2$ 时连续；另给情形为跳跃间断。

对应方法　05-3、05-2。

基于公开真题风格的推测　2022 年第 18 题用根式有理化拼接，2013 年第 22 题同时对齐两个单侧极限和单点值。

延伸题 2　约掉之后还有几个间断点

令 $f(x)=(x-1)^2/[(x-1)(x+2)]$，按原式定义。列出间断点并问能否仅靠补点使函数在两点都连续。

解题线索　找原分母零点后分别比较去心极限。

反套路点　约去的因子对应一个仍然存在的缺点。

解析　在两禁点外化为 $(x-1)/(x+2)$。在 1 极限为 0，补 $f(1)=0$ 可连续；在 -2 分子趋 -3，分母趋零且两侧异号，有限补值无效。

答案　1 可去，-2 无穷间断，不能靠补点让两处都连续。

对应方法　05-2、05-1。

基于公开真题风格的推测　2018 年第 3 题用约分区分间断点，2021 年第 1 题识别可去间断。

题型06：导数定义、分段点可导性与关系判断

6.1 思维导图与方法总览

差商的分母和自变量的增量不一样，怎么办?

2022 年第 5 题（汇编第 1 页，题意摘述）　用 $f'(1)$ 表示 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-3x)}{x}$。

自变量从 1 变到 $1-3x$，实际增量为 $h=-3x$。把分子改成“新值减旧值”，再把分母改成 h。

$$\frac{f(1)-f(1-3x)}{x}=3\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

当 $h\to 0$ 时，右侧的差商趋于 $f'(1)$。答案是 $3f'(1)$，两个负号在改写时抵消。

同类题怎样选方法

本题型共 3 个方法。

```
导数定义、分段点可导性与关系判断
├─ 06-1 把变形差商还原为定义
├─ 06-2 比较左右导数
└─ 06-3 用蕴含关系或反例检查条件
```

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

```
分段点 a
├─ 左侧增量 h < 0 → 左差商极限
└─ 右侧增量 h > 0 → 右差商极限
                    两个有限值相同 → 可导
```

读图时两支都以同一个点值 $f(a)$ 为基准，再比较所得斜率。

06-1 把变形差商还原为定义

什么时候用　出现 $f(a+ch)$、对称差或只知函数连续

1. 用 h 写真实自变量增量。
2. 加减 $f(a)$，把式子拆成标准差商。
3. 提取前面的倍数，求极限。

用到的公式或定理　$f'(a)=\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]/h$。

易错点　增量符号与分子反号需要同时处理。

对应真题　2022 年第 5 题、2013 年第 13 题、2012 年第 4 题、2011 年第 5 题。

06-2 比较左右导数

什么时候用　含绝对值、拼接点或振荡项

1. 确认点值。
2. 算左右差商。
3. 验证两值有限且相等，再写导数。

用到的公式或定理　可导等价于两个单侧差商极限存在且相等。

易错点　左右支仅求导函数并求极限不能代替原差商。

对应真题　2021 年第 7 题、2016 年第 25 题、2015 年第 25 题、2013 年第 5 题。

06-3 用蕴含关系或反例检查条件

什么时候用　题目问充分、必要或邻域性质

1. 写出要检查的两个方向。
2. 用已知定理推出能成立的一向。
3. 给反例或局部计算排除另一向。

用到的公式或定理　一元函数在一点可导等价于可微，并蕴含该点连续。

易错点　一点导数存在并非导函数连续。

对应真题　2014 年第 10 题、2012 年第 3 题、2009 年第 4 题、2008 年第 5 题。

6.2 核心概念与通俗解释

差商和导数　用越来越短的线段斜率逼近切线斜率。

导数是差商在增量趋零时的有限极限。 带倍数或反号时先整理成定义。

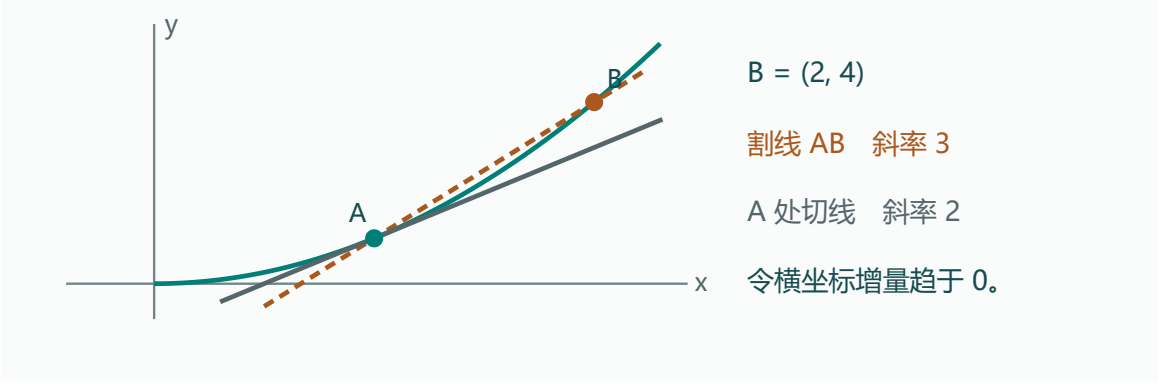

图 06-1　割线怎样逼近切线。示例取 $y=x^2$、固定 A=(1,1)，把另一个点从 B 移向 A，割线斜率便从 3 逼近 2。

容易出错的地方：分母不是两个输入的真实差。

单侧导数　分别从左、右看同一个尖点的坡度。

只允许增量从指定一侧趋零。 分段点用同一个实际点值当基准。

容易出错的地方：一侧导数存在就宣称双侧可导。

可微、连续与必要条件　能用固定斜率作一阶近似时，图形也能在该点接上。

在一元内点，可微是误差相对增量趋零的线性近似，等价于可导；可导推出连续。 分析概念判断题和振荡反例。

容易出错的地方：把连续倒推可导，或把导数存在当作导函数连续。

6.3 真题归类总结

本章共 18 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

把变形差商还原为定义（06-1）

2022 年第 5 题 • 汇编第 1 页　$\lim_{x\to 0}[f(1)-f(1-3x)]/x$

令 $h=-3x$，化成 $3[f(1+h)-f(1)]/h$，结果 $3f'(1)$。

易错点：分子与增量各有一个负号。

2013 年第 13 题 • 汇编第 54 页　已知 $f'(1)=4$，求 $[f(1-h)-f(1)]/(4h)$ 的极限

令增量 $u=-h$，把系数 $-1/4$ 提出，得 -1。

易错点：差商分母应为真正增量。

2012 年第 4 题 • 汇编第 59 页　两侧增量的导数型极限

加减 $f(a)$，把 $[f(a+x)-f(a-x)]/x$ 拆成两个都趋 $f'(a)$ 的项，得 $2f'(a)$。

易错点：增量 $-x$ 同时带来符号变化。

2011 年第 5 题 • 汇编第 65 页　$[f(1)-f(1-x)]/(2x)$ 的极限

取 $h=-x$，式子为 $\frac{1}{2}[f(1+h)-f(1)]/h$，得 $\frac{1}{2}f'(1)$。

易错点：自变量位置是 1。

2010 年第 3 题 • 汇编第 71 页　只知 g 在 a 连续，求 $[(x-a)g(x)]'_{x=a}$

$f(a)=0$，差商直接约去 $x-a$ 得 $g(x)\to g(a)$。

易错点：题设只保证 g 连续，不能直接写含 g' 的乘积法则。

2010 年第 14 题 • 汇编第 72 页　由 $[f(x_0)-f(x_0+7h)]/h\to 3$ 求导数

原式为 -7 乘定义差商，故 $f'(x_0)=-3/7$。

易错点：别把分母 h 当成真实增量 $7h$。

2009 年第 5 题 • 汇编第 77 页　$[f(x_0)-f(x_0-2h)]/h$ 的极限

令增量 $u=-2h$，原式是 2 倍定义差商，得 $2f'(x_0)$。

易错点：两个负号抵消。

比较左右导数（06-2）

2021 年第 7 题 • 汇编第 6 页　$|x|$ 在零点的可导与极值

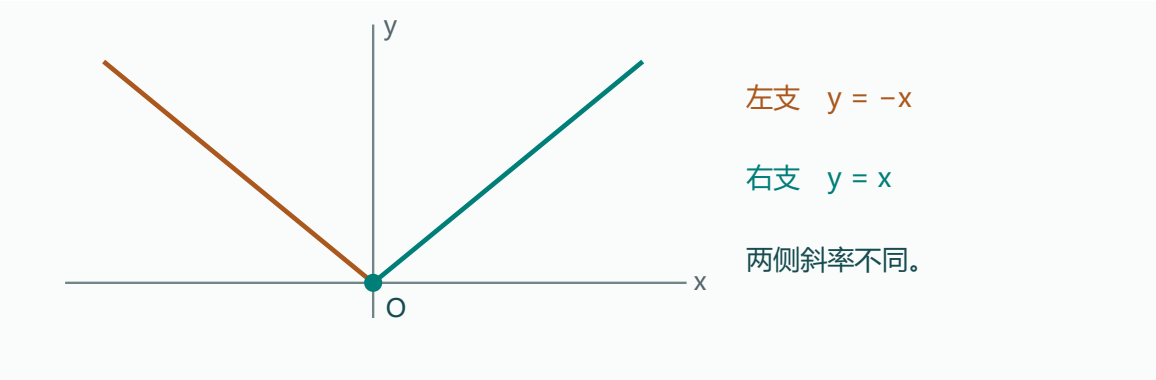

图 06-2　绝对值函数的尖点。从两边分别走向原点，左边斜率为 −1，右边为 1；最低点存在，导数却不存在。

左、右差商分别为 $-1, 1$，所以不可导。又 $|x| \geq 0$ 且仅零点取零，故有极小值。　（配合 06-3）

易错点：不可导点也可能取得极值。

2016 年第 25 题 • 汇编第 40 页　$f(x) = x|x|$ 在零点的导数与单调性

差商为 $|h| \to 0$，所以 $f'(0) = 0$。零点外 $f'(x) = 2|x| > 0$，或按两支直接比值，可见全实轴严格递增。　（配合 06-1）

易错点：单个点导数为零不阻止严格单调。

2015 年第 25 题 • 汇编第 46 页　振荡分段函数的零点可导性及邻域单调性

$f(x) = x/2 + x^2 \sin(1/x)$（非零时）。在零点差商趋 $1/2$。对 $x \neq 0$ 求导得 $1/2 + 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$；沿 $1/x = 2n\pi$ 与 $(2n+1)\pi$，导数分别取 $-1/2, 3/2$，任意零点邻域都不是单调区间。（配合 06-1）

易错点：一点导数为正推不出邻域单调。

2013 年第 5 题 • 汇编第 53 页　$|x|$ 在零点是否连续、可导或可微

两侧函数值均趋零，所以连续，但单侧导数分别 $-1, 1$，不可导也不可微。　（配合 06-3）

易错点：一元函数在一点可微与可导等价。

2012 年第 22 题 • 汇编第 61 页　x^2 与 $ax + b$ 在 $x = 1$ 拼接

连续给 $a + b = 1$，两侧导数相等给 $a = 2$，故 $b = -1$。　（配合 06-3）

易错点：先对齐函数值，再对齐斜率。

2007 年第 4 题 • 汇编第 89 页　$x^n \sin(1/x)$ 补零后何时可导

在表达式有定义的各侧，零点差商为 $x^{n-1}\sin(1/x)$。$n > 1$ 由夹逼趋 0；$n = 1$ 振荡；更低次沿正半轴选取正弦为 ± 1 的序列即不可能有限收敛。题列条件为 $n > 1$。　（配合 06-1）

易错点：先算除以 x 之后的阶数，实幂定义随题设取值范围。

2006 年第 6 题 • 汇编第 95 页　在 2 连续但不可导的选项

$|x-2|$ 在 2 连续，左右导数为 $-1, 1$。含极点和对数禁点的选项不连续，平方函数可导。　（配合 06-3）

易错点：区分尖点与定义域缺口。

用蕴含关系或反例检查条件（06-3）

2014 年第 10 题 • 汇编第 48 页　在 1 可导且 $f(x)/(x-1)$ 有有限极限

由 $f(x)=(x-1)[f(x)/(x-1)] \to 0$，再由可导蕴含连续得 $f(1)=0$。　（配合 06-1）

易错点：给出的商起初并非导数定义。

2012 年第 3 题 • 汇编第 59 页　连续能否推出可导

可能可导，如 $f(x)=x$；也可能不可导，如 $f(x)=|x|$ 在零点。所给条件下结论是不一定可导。（备用或配合 06-2）

易错点：“不一定”和“一定不可导”不同。

2009 年第 4 题 • 汇编第 77 页　连续是可导的什么条件

可导推出连续。反例 $|x-x_0|$ 连续但左右导数不等，所以连续是必要非充分条件。 同题出处另见 2008 年第 5 题。

易错点：判断的方向从“可导”出发。

2008 年第 5 题 • 汇编第 83 页　判断连续与可导的充分必要关系

与 **2009 年 / 册页 77 / 第 4 题** 共用本节解析。反例须同时满足“连续”和“不可导”。

易错点：反例须同时满足“连续”和“不可导”。

6.4 反套路延伸题

延伸题 1　对称差商可能掩盖尖点

先设 $f'(2)=3$，求 $\lim_{h\to 0}[f(2+2h)-f(2-2h)]/h$。再判断若该极限为 12，能否倒推 $f'(2)=3$。

解题线索　正向计算先加减 $f(2)$。反向测试线性项加绝对值。

反套路点　对称地取点时，偶对称的尖点项会在分子中抵消。

解析　加减 $f(2)$ 后，两个标准差商分别乘 2，故极限为 $4f'(2)=12$。反过来，取 $f(2+s)=3s+|s|$，其中 $s\in\mathbb{R}$。两个绝对值项相消，分子恒为 $12h$。但 f 在 2 的左、右导数分别为 2 和 4，故不可导。

答案　正向极限为 12。仅凭该极限不能推出在 2 可导。

对应方法　06-1、06-3。

基于公开真题风格的推测　2022 年第 5 题通过增量倍数还原导数定义，2012 年第 4 题同时处理左右增量。本题再检验结论能否反推。

延伸题 2　导数存在但导函数不连续

设 $f(0)=0$，$x\neq 0$ 时 $f(x)=x^2\sin(1/x)+2x$。求 $f'(0)$，并判导函数是否在零点连续。

解题线索　差商中有因子 x，一般导数中有不乘 x 的余弦。

反套路点　零点差商和非零点求导出现的振荡项强度不同。

解析　差商为 $2+x\sin(1/x)\to 2$。非零时 $f'=2+2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$；取 $1/x=2n\pi$ 与 $(2n+1)\pi$，导数分别为 $1,3$，故导函数没有零点极限。

答案　$f'(0)=2$，f' 在 0 不连续。

对应方法　06-2、06-3。

基于公开真题风格的推测　2015 年第 25 题用振荡分段式区分点上可导与邻域表现，2016 年第 25 题要求按定义证明零点可导。

题型07：显函数求导、高阶导数与微分

7.1 思维导图与方法总览

一个式子套了三层，从哪一层求导?

2022 年第 6 题（汇编第 1 页，题意摘述）　求 $y=\sin^2(2x)$ 的导数。

从外往里读是“平方、正弦、乘二”。平方求导给 $2\sin(2x)$，正弦求导给 $\cos(2x)$，最后还要乘上 $2x$ 的导数。

$$y'=2\sin(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2=2\sin(4x)$$

最后一个 2 来自最内层。即使不使用倍角公式，写到 $4\sin(2x)\cos(2x)$ 也已算完。

同类题怎样选方法

本题型共 5 个方法。

> 显函数求导、高阶导数与微分
> ├─ 07-1 基本公式和四则法则
> ├─ 07-2 链式法则
> ├─ 07-3 对数求导
> ├─ 07-4 逐次或找规律求高阶导数
> └─ 07-5 用 导数乘自变量微分 表示微分

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

07-1 基本公式和四则法则

什么时候用　给出显式多项式、乘积或商

1. 看最外运算。
2. 按需要使用和、积、商规则。
3. 合并并在最后代点。

用到的公式或定理　$(uv)'=u'v+uv'$，$(u/v)'=(u'v-uv')/v^2$　$(v\neq 0)$　。

易错点　两项的乘积求导不能直接相乘导数。

对应真题　2020 年第 5 题、2020 年第 13 题、2022 年第 6 题、2021 年第 5 题。

07-2 链式法则

什么时候用 能辨认多层自变量

1. 圈出内层函数。
2. 求最外层导数。
3. 逐层乘内导数并回代。

用到的公式或定理 $(F\circ g)'(x)=F'(g(x))g'(x)$。

易错点 三角或指数内部常数倍易漏。

对应真题 2022 年第 6 题、2021 年第 5 题、2017 年第 19 题、2015 年第 4 题。

07-3 对数求导

什么时候用 幂函数的底和指数都变，或乘商因子多

1. 在适用区间取 $\ln y$ 或 $\ln|y|$。
2. 把乘方、乘商拆成和差后求导。
3. 乘回 y 并复核零点。

用到的公式或定理 $(\ln|y|)'=y'/y$，$y\neq 0$；$u(x)^{v(x)}$ 用实对数法通常要求 $u>0$。

易错点 对数化去掉的点要按原式检查。

对应真题 2012 年第 13 题、2011 年第 23 题。

07-4 逐次或找规律求高阶导数

什么时候用 出现二阶、十阶或一般第 n 阶

1. 逐次求前两三阶。
2. 从指数、周期或幂次提规律。
3. 用归纳或高阶乘积式验证。

用到的公式或定理 $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$。

易错点 阶乘下标与符号容易错一位。

对应真题 2020 年第 14 题、2019 年第 5 题、2014 年第 5 题、2013 年第 6 题。

07-5 用 $dy=f'(x)\,dx$ 表示微分

什么时候用 题目明确要求 dy

1. 先求导数 $f'(x)$。
2. 写 $dy=f'(x)dx$。
3. 如给点则把相应变量代入系数。

用到的公式或定理 $dy=f'(x)dx$。

易错点 不要只报系数而省 dx。

对应真题 2021 年第 14 题、2020 年第 6 题、2019 年第 13 题、2016 年第 6 题。

7.2 核心概念与通俗解释

乘积法则与链式法则　先看是把两个量相乘，还是把一个量送进另一条规则。

乘积求导分别改变一个因子；复合求导逐层相乘。 标出算式的最外结构。

容易出错的地方：所有函数一律使用乘积法则。

对数求导　把乘除和幂变成较容易的加减乘。

对正值或非零区间的绝对值取对数，再求导。 用在 x^x 或积、商、幂多层题。

容易出错的地方：把过零点也当成可直接取对数。

高阶导数　每求一次，再对刚得到的斜率函数求变化率。

二次及以上连续执行求导；阶数记为 $f^{(n)}$。 找指数倍数、高阶乘积及反复降幂规律。

容易出错的地方：把 f'' 看成 $(f')^2$。

微分　给很小的输入变化，加上斜率给出的第一步估计。

一阶线性变化量，系数为导数，乘自变量微分。 题问 dy 时给完整微分式。

容易出错的地方：漏记 dx 或把 dy 写成精确有限增量。

7.3 真题归类总结

本章共 31 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

基本公式和四则法则（07-1）

2020 年第 5 题 • 汇编第 11 页　$f(x)=x^{2020}$ 求 $f'(1)$

幂法则给 $2020x^{2019}$，代 1 得 2020。

易错点：先求导再代点。

2020 年第 13 题 • 汇编第 12 页　$f(x)=\tan x$ 求 $f'(0)$

$f'(x)=\sec^2 x$，故 $f'(0)=1$。

易错点：切勿误写为 $1/\sin^2 x$。

链式法则（07-2）

2022 年第 6 题 • 汇编第 1 页　$y=\sin^2(2x)$ 求 y'

按平方、正弦、$2x$ 三层求导得 $4\sin(2x)\cos(2x)=2\sin(4x)$。　（配合 07-1）

易错点：内层导数是 2。

2021 年第 5 题 • 汇编第 5 页　$y=2^{-x}+\ln 3$ 求导

指数项求导得 $-2^{-x}\ln 2$，常数项导数为零。　（配合 07-1）

易错点：$\ln 3$ 不是变量项。

2017 年第 19 题 • 汇编第 31 页　$y=\ln(x+\sqrt{4+x^2})$ 的导数

商写为 $(1+x/\sqrt{4+x^2})/(x+\sqrt{4+x^2})$，化简为 $1/\sqrt{4+x^2}$。　（配合 07-1）

易错点：被取对数的量恒正。

2015 年第 4 题 • 汇编第 41 页　$y=e^{2015x}$ 的一阶导数

内层导数 2015，故 $y'=2015e^{2015x}$。　（配合 07-1）

易错点：指数系数同时保留在指数和外因子中。

2009 年第 13 题 • 汇编第 78 页　$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 求导

利用 $(1+x/\sqrt{1+x^2})/(x+\sqrt{1+x^2})$，化简得 $1/\sqrt{1+x^2}$。　（配合 07-1）

易错点：对数内为正。

2008 年第 14 题 • 汇编第 84 页　$y=f(e^x)e^{f(x)}$ 求 y'

分别求导后相加，得 $e^{f(x)}[e^x f'(e^x)+f(e^x)f'(x)]$。　（配合 07-1）

易错点：$f'(e^x)$ 与 $f'(x)$ 出现在不同项。

2006 年第 5 题 • 汇编第 95 页　$y=\cos(e^{-x})$ 求导

外层导数 $-\sin(e^{-x})$，内层导数 $-e^{-x}$，相乘得 $e^{-x}\sin(e^{-x})$。　（配合 07-1）

易错点：两个负号抵消。

2006 年第 13 题 • 汇编第 96 页　可微 f 构造的商 $f(e^x)/e^{f(x)}$

改写成 $f(e^x)e^{-f(x)}$，求得 $e^{-f(x)}[e^x f'(e^x)-f(e^x)f'(x)]$。　（配合 07-1）

易错点：分母指数求导也要乘 $f'(x)$。

对数求导（07-3）

2012 年第 13 题 • 汇编第 60 页　$y=x^x$ 在 $x>0$ 的导数

$\ln y=x\ln x$，微分得 $y'/y=\ln x+1$，故 $y'=x^x(\ln x+1)$。　（配合 07-2）

易错点：底和指数都变化，不能用单一幂法则。

2011 年第 23 题 • 汇编第 67 页　乘商与根式复合的微分

设 $y=(x-1)\sqrt[3]{x+2}/[(x-3)^2e^{2x}]$。在 $x\neq -2,1,3$，对 $\ln|y|$ 求导得 $dy=y[1/(x-1)+1/(3(x+2))-2/(x-3)-2]dx$。$x=1$ 用乘积式，导数为 $\sqrt[3]{3}/(4e^2)$；$x=-2$ 普通导数不存在。（配合 07-5）

易错点：对数化中途排除的零点须回原式检查。

逐次或找规律求高阶导数（07-4）

2020 年第 14 题 • 汇编第 12 页　$f(x)=x+\sin x$ 求 $f''(x)$

$f'=1+\cos x$，再求导得 $-\sin x$。　（配合 07-1）

易错点：常数项二次求导后消失。

2019 年第 5 题 • 汇编第 17 页　$y=\cos 2x$ 的二阶导数

两次求导为 $-2\sin 2x$ 和 $-4\cos 2x$。　（配合 07-2）

易错点：内层倍数每求一次都出现。

2014 年第 5 题 • 汇编第 47 页　$f(x)=5x+e^x$ 求 $f''(1)$

$f'=5+e^x$，$f''=e^x$，代入得 e。　（配合 07-1）

易错点：线性项不贡献二阶导数。

2013 年第 6 题 • 汇编第 53 页　$y=2^x$ 的第 2013 阶导数

每求导一次乘 $\ln 2$，由归纳得 $y^{(2013)}=2^x(\ln 2)^{2013}$。　（配合 07-2）

易错点：保留底数 2。

2012 年第 14 题 • 汇编第 60 页　$y=x\ln x$ 的二阶导数在 $x=\sqrt{5}$ 的值

$y'=\ln x+1$，$y''=1/x$，代入得 $1/\sqrt{5}$。　（配合 07-1）

易错点：题目求二阶导数的点值。

2011 年第 6 题 • 汇编第 65 页　$y=xe^{2x}$ 的十阶导数

用乘积高阶求导，仅 x 的零阶和一阶导数有贡献，得 $e^{2x}[2^{10}x+10\cdot 2^9]=2^9(2x+10)e^{2x}$。　（配合 07-1）

易错点：一阶导数项有组合系数 10。

2010 年第 4 题 • 汇编第 71 页　十六次多项式求十七阶导数

多项式次数最高为 16，第十七次求导各项都为零，因此所求点值为 0。　（配合 07-1）

易错点：与 16 阶导数区分。

2009 年第 6 题 • 汇编第 77 页　$y=\ln(1+x)$ 求第十阶导数

由 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!/(1+x)^n$，得 $-9!/(1+x)^{10}$，$x>-1$。　（配合 07-2）

易错点：阶乘从一阶导数的常数 1 开始。

2008 年第 4 题 • 汇编第 83 页　$y=x\ln x$ 的第十阶导数

二阶导数为 $1/x$，继续求八次导得 $8!/x^9$。　（配合 07-1）

易错点：x^{-1} 的八次导号为正。

2008 年第 15 题 • 汇编第 84 页　$f(x)=x^3\ln x$ 求 $f''(1)$

$f'=3x^2\ln x+x^2$，$f''=6x\ln x+5x$，代 1 得 5。　（配合 07-1）

易错点：不要先把 $\ln 1$ 消掉再求导。

2007 年第 22 题 • 汇编第 91 页　$y=\ln(1+x)$ 求高阶导数

依次有 $y'=1/(1+x)$、$y''=-1/(1+x)^2$。通式 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!/(1+x)^n$。照片所问的撇号阶次待确认，通式可按原阶次直接代入。　（配合 07-1）

易错点：确认撇号数量后再抄最终答案。

2006 年第 14 题 • 汇编第 96 页　$f(x)=xe^{-x}$ 求 $f''(-1)$

$f'=(1-x)e^{-x}$，$f''=(x-2)e^{-x}$，代 -1 得 $-3e$。　（配合 07-1）

易错点：负自变量代入 e^{-x} 得 e。

用 $dy=f'(x)\,dx$ 表示微分（07-5）

2021 年第 14 题 • 汇编第 6 页　$y=\ln(2/x)$ 求微分

在 $x>0$ 写成 $\ln 2-\ln x$，得 $dy=-dx/x$。　（配合 07-2）

易错点：微分带 dx。

2020 年第 6 题 • 汇编第 12 页　$y+\ln(2x)=2$ 求微分

移项后 $y'=-(2/(2x))=-1/x$，所以 $dy=-dx/x$。　（配合 07-2）

易错点：链式法则的 2 会约掉。

2019 年第 13 题 • 汇编第 18 页　$y=\cos x+e^{x^2}$ 的微分

得 $dy=(-\sin x+2xe^{x^2})\,dx$。　（配合 07-2）

易错点：指数是 x^2，内导数为 $2x$。

2016 年第 6 题 • 汇编第 35 页　$y=e^{-x}$ 的微分

链式法则得 $-e^{-x}$，所以 $dy=-e^{-x}\,dx$。　（配合 07-2）

易错点：指数不改成 $+x$。

2013 年第 23 题 • 汇编第 55 页　$y=e^{2x}\sin(\ln x)$ 的微分

逐因子求导再用乘积法则，$dy=e^{2x}[2\sin(\ln x)+\cos(\ln x)/x]\,dx$，$x>0$。　（配合 07-2）

易错点：两处复合都要乘内层导数。

2009 年第 14 题 • 汇编第 78 页　指数乘余弦求微分

对 $y=e^{1-3x}\cos x$ 用乘积法则，得 $dy=e^{1-3x}(-3\cos x-\sin x)dx$。　（配合 07-2）

易错点：余弦求导含负号。

2006 年第 22 题 • 汇编第 97 页　反正弦与根式乘和的微分

对 $3x^3\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$ 逐项求导，含根式分母的两项合成 $-2x\sqrt{1-x^2}$，与根式项 $2x\sqrt{1-x^2}$ 抵消，故 $dy=9x^2\arcsin x\,dx$（$|x|<1$）。　（配合 07-1）

易错点：先按内点使用链式法则，再观察消项。

7.4 反套路延伸题

延伸题 1　变化的底数与变化的指数

求 $y=(1+x)^{\sin x}$ 在 $x=0$ 的微分，并给邻域的一般导数。

解题线索　在 $x>-1$ 取对数，右侧为 $\sin x\ln(1+x)$。

反套路点　底和指数都变化，但在点上两部分恰好同时消去。

解析　由 $\ln y=\sin x\ln(1+x)$，得 $y'/y=\cos x\ln(1+x)+\sin x/(1+x)$。把 $x=0$ 代入，方括号两项均为零。

答案　一般导数为 $(1+x)^{\sin x}[\cos x\ln(1+x)+\sin x/(1+x)]$；零点微分为 $0\,dx$。

对应方法　07-3、07-2。

基于公开真题风格的推测　2012 年第 13 题使用对数求导，2022 年第 6 题需要分层处理三角内参。

延伸题 2　高阶导数只剩三项

求 $f(x)=x^2e^{3x}$ 的第十阶导数在 0 的值。

解题线索　多项式的三阶及以上导数为零。

反套路点　代点后高阶乘积式只有一个非零项。

解析　按高阶乘积式，x^2 的零、一阶导数在零点都为零，二阶为 2，三阶以上为零。因此只留 $\binom{10}{2}\cdot 2\cdot 3^8$。

答案　$90\cdot 3^8=590490$。

对应方法　07-4、07-1。

基于公开真题风格的推测　2011 年第 6 题中 xe^{2x} 的高阶求导利用多项式因子迅速截断，2010 年第 4 题考查高阶求导下多项式消失。

题型08：隐函数与参数方程求导

8.1 思维导图与方法总览

等式里只有混在一起的 x 和 y，怎样求微分？

2022 年第 19 题（汇编第 3 页，题意摘述）　已知 $\sin y + y^2 - 3x = 0$，求 dy。

对等式两边取微分。$\sin y$ 给出 $\cos y\, dy$，y^2 给出 $2y\, dy$；把这两项放在一起。

$$(\cos y + 2y)\, dy = 3\, dx$$

在 $\cos y + 2y \neq 0$ 处，两边除以同一系数，得到 $dy = 3\, dx/(\cos y + 2y)$。

同类题怎样选方法

本题型共 4 个方法。

> 隐函数与参数方程求导
> ├─ 08-1 隐式等式两边求导并解出所求导数
> ├─ 08-2 参数导数之比及再次求导
> ├─ 08-3 先显式化或消参再求导
> └─ 08-4 参数变化率同时为零时回到差商或分支表达

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

08-1 隐式等式两边求导并解出所求导数

什么时候用　题给 $F(x, y) = 0$，两个变量混在等式里

1. 决定对 x 或 y 求导。
2. 把另一变量按链式当函数并收集导数。
3. 解出导数，检查待除系数。

用到的公式或定理　若 $F_y \neq 0$，局部有 $dy/dx = -F_x/F_y$；反向导数需 $F_x \neq 0$。

易错点　xy 求导包含两项。

对应真题　2022 年第 19 题、2018 年第 18 题、2016 年第 19 题、2015 年第 19 题。

08-2 参数导数之比及再次求导

什么时候用 x, y 都由同一参数 t 给出

1. 分别求 x_t, y_t。
2. 在 $x_t \neq 0$ 处取比值。
3. 若求二阶，再对比值求 t 导数并除 x_t。

用到的公式或定理 $y_x = y_t/x_t$，$y_{xx} = (d(y_x)/dt)/x_t$。

易错点 二阶导数不能用 y_{tt}/x_{tt}。

对应真题 2020 年第 19 题、2014 年第 13 题、2010 年第 24 题、2008 年第 22 题。

08-3 先显式化或消参再求导

什么时候用 方程可直接解出变量，或有容易辨认的恒等式

1. 选便于表达的分支。
2. 解式或消参时保留取值和符号。
3. 按显式法求导后回代。

用到的公式或定理 例如 $x = \sin t$，$y = \cos 2t$ 给 $y = 1 - 2x^2$。

易错点 消参得到平方关系时须区分正负支。

对应真题 2021 年第 17 题、2012 年第 24 题、2011 年第 24 题、2006 年第 23 题。

08-4 参数变化率同时为零时回到差商或分支表达

什么时候用 在指定点 $x_t = y_t = 0$，或参数关系有退化

1. 先求指定点坐标与附近分支。
2. 用差商 $(y(t) - y(t_0))/(x(t) - x(t_0))$，或有效消参。
3. 判每支极限是否相同，并说明一侧或双侧。

用到的公式或定理 导数比规则只保证 $x_t \neq 0$ 的点。

易错点 把点上的 $0/0$ 当作斜率。

对应真题 2009 年第 23 题。

8.2 核心概念与通俗解释

隐函数 知道两个量被一条等式绑在一起，即使未能直接解开。

一个关系可在适当局部确定 y 随 x 的变化。 等式两边一起求导，解出 y'。

容易出错的地方：误把 y 当常量。

参数方程 用时间同时记录横向、纵向位置。

同一个参数确定平面点的两个坐标。 先求两分速度，再按方向取比。

容易出错的地方：把参数速度直接当坐标斜率。

分支与退化点　一条路径可能向回折，或在某处瞬间停住。

同一横坐标可能对应不同纵坐标；速度为零时斜率公式需要另证。 以点差商或消参确定局部的导数。

容易出错的地方：跨越分支使用同一个显式式子。

二阶导数　斜率还在变，二阶导数描述斜率如何变。

是对一阶导数再按自变量求导。 写清 $d/dx = (1/x_t)d/dt$ 的条件。

容易出错的地方：对参数求一遍后忘记再换成对 x。

8.3 真题归类总结

本章共 19 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

隐式等式两边求导并解出所求导数（08-1）

2022 年第 19 题 • 汇编第 3 页　$\sin y + y^2 - 3x = 0$ 求 dy

两边微分得 $(\cos y + 2y)dy = 3dx$，当系数非零时 $dy = 3dx/(\cos y + 2y)$。

易错点：含 y 的两项都要带 dy。

2018 年第 18 题 • 汇编第 25 页　$y^2 + 2y + x = 0$ 求导并写切线

$2(y+1)y' + 1 = 0$，$y' = -1/[2(y+1)]$；在 $(0,0)$ 处斜率 $-1/2$，切线 $y = -x/2$。

易错点：斜率要在指定分支的点代入。

2016 年第 19 题 • 汇编第 37 页　$x + y = e^y$ 的隐函数导数

$1 + y' = e^y y'$，故 $y' = 1/(e^y - 1)$，分母非零的分支有效。

易错点：不要漏掉左边的 y'。

2015 年第 19 题 • 汇编第 43 页　$e^y + 2xy = x^2$ 求 y'

$(e^y + 2x)y' = 2x - 2y$，故 $y' = 2(x-y)/(e^y + 2x)$，当分母非零。

易错点：乘积 xy 两项都要求导。

2013 年第 24 题 • 汇编第 55 页　$y^2 = x^2 + ye^x$ 求 y'

求导得 $(2y - e^x)y' = 2x + ye^x$，故可除时为 $(2x + ye^x)/(2y - e^x)$。

易错点：右边 ye^x 的 y 也变化。

2012 年第 23 题 • 汇编第 61 页　$y = \sin(x + y)$ 求微分

$dy = \cos(x+y)(dx + dy)$，移项得 $dy = [\cos(x+y)/(1 - \cos(x+y))]dx$，分母须非零。

易错点：内层微分为 $dx + dy$。

2010 年第 23 题 • 汇编第 73 页　$ye^x+\ln y=2$ 的隐函数导数

由 $(e^x+1/y)y'=-ye^x$，得 $y'=-y^2e^x/(ye^x+1)$，$y>0$。

易错点：对数限制 y 的符号。

2009 年第 24 题 • 汇编第 79 页　$y=xe^y$ 求一、二阶导数

整理得 $(1-y)y'=e^y$，故 $y'=e^y/(1-y)$。将右式视为 y 的函数再求导，得 $y''=e^{2y}(2-y)/(1-y)^3$，$y\neq 1$。

易错点：第二次对 y 的表达式求导必须乘 y'。

2008 年第 23 题 • 汇编第 85 页　$y=xe^y+1$ 求 y'

$y'=e^y+xe^yy'$，故 $y'=e^y/(1-xe^y)=e^y/(2-y)$（分母非零）。

易错点：用原关系化简时常数为 1。

2007 年第 14 题 • 汇编第 90 页　$\ln(x+y)=xy^2+\sin x$ 在 $x=0$ 的导数

先由 $\ln y=0$ 求 $y=1$。求导后在该点代入得 $1+y'=1+1=2$，故 $y'=1$。

易错点：别把 $x=0$ 事先代入整个方程再求导。

参数导数之比及再次求导（08-2）

2020 年第 19 题 • 汇编第 14 页　$x=2t,\ y=\sin t$ 与 $t=0$ 处切线

点为 $(0,0)$，$dx/dt=2$，$dy/dt=\cos t$，切线斜率 $1/2$，得 $y=x/2$。　（配合 08-3）

易错点：参数 t 不能直接当横坐标。

2014 年第 13 题 • 汇编第 48 页　$x=t^2/2,\ y=t+1$ 求 dy/dx

用比值 $1/t$（$t\neq 0$）。在 $t=0$ 参数曲线的非零切向量为竖直方向。　（配合 08-3）

易错点：公式要求 $dx/dt\neq 0$。

2010 年第 24 题 • 汇编第 73 页　$x=\cos t,\ y=\sin t$ 求二阶导数

先得 $y'=-\cot t$，再以 $\csc^2 t$ 除 $dx/dt=-\sin t$，得 $-\csc^3 t$（$\sin t\neq 0$）。　（配合 08-3）

易错点：二阶不能用 y_{tt}/x_{tt}。

2008 年第 22 题 • 汇编第 85 页　$x=\theta(1-\sin\theta),\ y=\theta\cos\theta$ 在 $\theta=0$ 的导数

分别对 θ 求导，在零点 $x_\theta=y_\theta=1$，所以斜率为 1。

易错点：先求导，再代零。

先显式化或消参再求导（08-3）

2021 年第 17 题 • 汇编第 7 页　$xe^{-y}-1=0$ 的反向导数与切线

解得 $x=e^{y}$，所以 $dx/dy=e^{y}=x$。在 $(1,0)$ 此值为 1，切线斜率 $dy/dx=1$，方程 $y=x-1$。（配合 08-1）

易错点：题的第一问求的是 dx/dy。

2012 年第 24 题 • 汇编第 61 页　$x=\sin t,\ y=\cos 2t$ 的二阶导数

用 $\cos 2t=1-2\sin^{2}t$ 消参得 $y=1-2x^{2}$，因此二阶导数为 -4。　（配合 08-2）

易错点：直接套参数公式会遇到 $\cos t=0$，消参可识别分支表达。

2011 年第 24 题 • 汇编第 68 页　$x=\arcsin t,\ y=\sqrt{1-t^{2}}$ 的二阶导数

$t=\sin x$ 且 $x\in[-\pi/2,\pi/2]$，所以 $y=\cos x$，二阶导数为 $-\cos x=-\sqrt{1-t^{2}}$（内点）。　（配合 08-2）

易错点：用主值范围确定根式符号。

2006 年第 23 题 • 汇编第 97 页　$xy+\ln x+\ln y=1$ 求导

因 $x,y>0$，令 $u=xy$，有 $u+\ln u=1$；此式左侧在正半轴严格增且 $u=1$ 满足，故 $y=1/x$，$y'=-1/x^{2}$。直接隐式求导也得 $y'=-y/x$。　（配合 08-1）

易错点：先检查 $\ln x+\ln y$ 可并成 $\ln(xy)$。

参数变化率同时为零时回到差商或分支表达（08-4）

2009 年第 23 题 • 汇编第 79 页　$x=(\ln t)^{2},\ y=t\ln t-t$ 在 $t=1$ 的导数

$t\neq 1$ 时比值 $(\ln t)/(2\ln t/t)=t/2$。在 $t=1$ 原比式为 $0/0$，用点差商 $[t\ln t-t+1]/(\ln t)^{2}$，洛必达得极限 $1/2$。两个局部分支从允许侧都得此斜率。　（配合 08-2）

易错点：不能把 $0/0$ 直接写成数。

8.4 反套路延伸题

延伸题 1　静止的参数点仍有切线

设 $x=t^3$，$y=2t^3+t^4$。求曲线在 $t=0$ 对应点的 dy/dx，并问二阶导数在那里是否有限。

解题线索　直接点差商，或用 $t=\sqrt[3]{x}$ 消参。

反套路点　两速度都是零，一阶仍可存在，二阶却可能发散。

解析　在 $t\neq 0$，点差商是 $2+t$，趋 2。消参后 $y=2x+|x|^{4/3}$，对 $x\neq 0$ 有 $y'=2+(4/3)\sqrt[3]{x}$；求 $[y'(x)-2]/x=(4/3)/|x|^{2/3}$，发散。

答案　一阶导数 2，二阶导数在该点不存在。

对应方法　08-4、08-3。

基于公开真题风格的推测　2009 年第 23 题在指定参数处遇到 $0/0$，2012 年第 24 题可借消参求二阶导数。

延伸题 2　交换求导方向并处理竖切线

曲线 $x=y^2+y$，求 dx/dy，并判断 $y=-1/2$ 对应点处的切线。

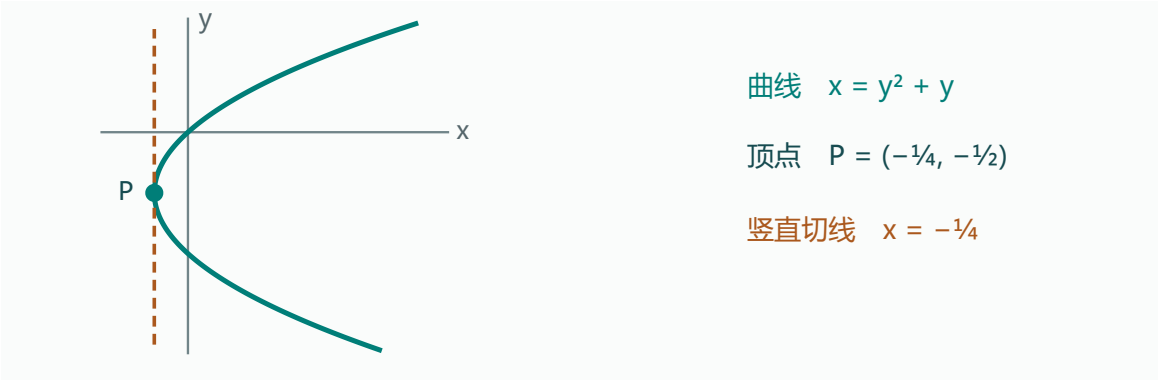

图 08-1　顶点处的竖直切线。沿抛物线走到最左点，横坐标暂时停止变化，切线沿竖直方向。

解题线索　把 y 看成参数，此时 $dy/dy=1$。

反套路点　反向导数为零时不能取倒数，但可以直接定切向方向。

解析　$dx/dy=2y+1$。在 $y=-1/2$，$x=-1/4$，参数切向量 $(0,1)$ 非零，故为竖直线。也可配方 $x+1/4=(y+1/2)^2$ 读出顶点。

答案　$dx/dy=2y+1$，切线 $x=-1/4$。

对应方法　08-1、08-3。

基于公开真题风格的推测　2021 年第 17 题先求 dx/dy 再求切线，2014 年第 20 题由 x 的显式表达式确定曲线斜率。

题型09：曲线切线与法线

9.1 思维导图与方法总览

知道导数后，还缺什么才能写切线?

2022 年第 13 题（汇编第 2 页，题意摘述）　求 $y=x^{2022}$ 在 $x=1$ 处的切线。

先求切点的两个坐标，得到 $(1,1)$。再求 $y'=2022x^{2021}$，把 $x=1$ 代入得到斜率 2022。

$$y-1=2022(x-1)$$

代回切点，等式左右都为零。斜率和经过的点都满足，直线就确定了。

同类题怎样选方法

本题型共 3 个方法。

> 曲线切线与法线
> ├─ 09-1 由点斜式写切线
> ├─ 09-2 以垂直方向写法线并处理水平或竖直情形
> └─ 09-3 先解切点或从隐式、参数式提取斜率

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

09-1 由点斜式写切线

什么时候用　已知显函数及切点或切点横坐标

1. 代原式求完整切点。
2. 求该点导数。
3. 写点斜式并验证过点。

用到的公式或定理　$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$。

易错点　求导和代点不能颠倒。

对应真题　2022 年第 13 题、2019 年第 19 题、2008 年第 16 题、2007 年第 17 题。

09-2 以垂直方向写法线并处理水平或竖直情形

什么时候用 题目明确要求法线

1. 确定切线方向。
2. 取与之垂直的方向。
3. 用点方向或点斜式写线。

用到的公式或定理 有限非零切线斜率 m 对应法线斜率 $-1/m$。

易错点 水平切线对应竖直法线，不能除以零。

对应真题 2012 年第 15 题、2010 年第 13 题、2019 年第 19 题。

09-3 先解切点或从隐式、参数式提取斜率

什么时候用 只给参数、一个坐标、倾角或隐式曲线

1. 求切点或列斜率条件。
2. 从隐式或参数式确定切向量。
3. 按切向量写所求直线。

用到的公式或定理 参数切向量 $(x_t, y_t) \neq (0, 0)$；倾角 θ 对应斜率 $\tan\theta$（非竖直）。

易错点 参数值与横坐标一般不同。

对应真题 2017 年第 18 题、2015 年第 13 题、2014 年第 20 题、2013 年第 14 题。

9.2 核心概念与通俗解释

切点和切向量 画一条线贴住曲线时，先定接触位置，再定朝向。

切点在曲线上，切向量沿曲线瞬时方向。 由切点和斜率或方向写方程。

容易出错的地方：只写导数值就当作直线方程。

法线 与曲线局部前进方向成直角。

经过切点且垂直于切线。 用方向垂直的关系处理轴平行线。

容易出错的地方：有限非零情况下漏掉负号，或在水平切线处取倒数。

倾斜角 同一斜率的平行线有相同方向。

直线与 x 轴正方向形成的角，常以 $[0, \pi)$ 表示。 先将角度条件转为导数约束。

容易出错的地方：把倾角的数值直接当斜率。

9.3 真题归类总结

本章共 13 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

由点斜式写切线（09-1）

2022 年第 13 题 • 汇编第 2 页　$y=x^{2022}$ 在 $x=1$ 的切线

切点 $(1,1)$，斜率 2022，得 $y-1=2022(x-1)$。

易错点：点值和导数值分别求。

2019 年第 19 题 • 汇编第 19 页　$y=x-1/x$ 在 $(1,0)$ 的两条线

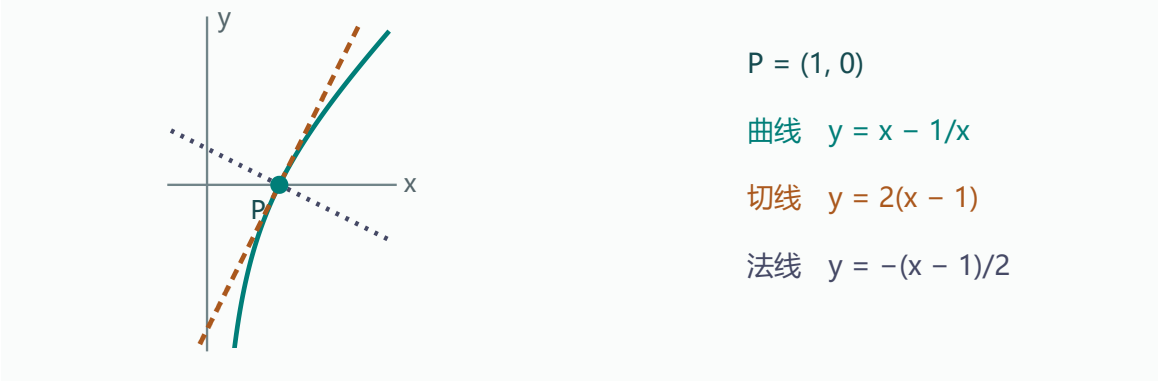

图 09-1　同一切点的切线与法线。横纵轴同尺度；在 P 处，曲线贴着切线前进，法线与这条切线成直角。

$y'=1+1/x^2$，在 1 为 2。切线 $y=2(x-1)$，法线 $y=-(x-1)/2$。　(配合 09-2)

易错点：负倒数只在切线斜率非零时直接使用。

2008 年第 16 题 • 汇编第 84 页　$y=x+e^x$ 在 $x=0$ 的切线

点 $(0,1)$，斜率 $1+e^0=2$，得 $y=2x+1$。

易错点：$e^0=1$。

2007 年第 17 题 • 汇编第 90 页　$y=x^3+1$ 在 $(1,2)$ 的切线

由 $y'=3x^2$ 得斜率 3，代点得 $y=3x-1$。

易错点：用整条直线而非只报斜率。

2006 年第 4 题 • 汇编第 95 页　$y=x+\ln x$ 在 $(1,1)$ 的切线

$y'=1+1/x$，在 1 为 2，得 $y=2x-1$。

易错点：由点斜式核对截距。

以垂直方向写法线并处理水平或竖直情形（09-2）

2012 年第 15 题 • 汇编第 60 页　$y=x^2+1$ 在 $(1,2)$ 的法线

切线斜率 2，法线斜率 $-1/2$，方程 $y-2=-(x-1)/2$。　(配合 09-1)

易错点：使用指定点的斜率。

2010 年第 13 题 • 汇编第 72 页　$y=\cos x$ 在 $(\pi/3,1/2)$ 的法线斜率

切线斜率 $-\sqrt{3}/2$，法线斜率 $2/\sqrt{3}$。

易错点：负倒数变为正。

先解切点或从隐式、参数式提取斜率（09-3）

2017 年第 18 题 • 汇编第 31 页　$e^y+2x+y=3$ 上纵坐标为零处的切线

先令 $y=0$ 得 $x=1$，再对原式求导得 $(e^y+1)y'=-2$。在点 $(1,0)$ 斜率为 -1，故 $y=1-x$。（配合 09-1）

易错点：这题只给纵坐标。

2015 年第 13 题 • 汇编第 42 页　$x=t^3$，$y=e^t$ 在 $t=1$ 的切线

切点 $(1,e)$，斜率为 $(dy/dt)/(dx/dt)=e/3$，故 $y-e=(e/3)(x-1)$。　（配合 09-1）

易错点：不要把 dy/dt 直接当斜率。

2014 年第 20 题 • 汇编第 50 页　$x=y^2+y-1$ 在 $(1,1)$ 的切线

由 $dx/dy=2y+1=3$ 取倒数为切线斜率，得 $y-1=(x-1)/3$。　（配合 09-1）

易错点：先区分求的是 dx/dy 还是 dy/dx。

2013 年第 14 题 • 汇编第 54 页　椭圆参数式在指定点的切线

$x=\cos t$，$y=2\sin t$ 在 $(\sqrt{2}/2,\sqrt{2})$ 对应 $t=\pi/4$。斜率为 $2\cos t/(-\sin t)=-2$，切线 $y-\sqrt{2}=-2(x-\sqrt{2}/2)$。　（配合 09-1）

易错点：两个坐标同时决定参数。

2011 年第 14 题 • 汇编第 66 页　$xe^y+xy+y=1$ 在 $x=0$ 的切线

切点 $(0,1)$。隐式求导得 $(xe^y+x+1)y'=-(e^y+y)$，斜率 $-(e+1)$，故 $y=1-(e+1)x$。（配合 09-1）

易错点：切点纵坐标由原式求。

2009 年第 15 题 • 汇编第 78 页　$y=x^3$ 上切线倾角为 $\pi/4$

斜率要求 $3x^2=\tan(\pi/4)=1$，故两处横坐标为 $\pm1/\sqrt{3}$。　（配合 09-1）

易错点：倾角等于 $\pi/4$ 不等于斜率是 $\pi/4$。

9.4 反套路延伸题

延伸题 1　法线方向反求切点

曲线 $y=x^3-3x$ 上哪些点的法线平行于 $y=x$？

解题线索　斜率为 1 的法线对应斜率为 -1 的切线。

反套路点　题目给的是法线斜率，要反求切点。

解析　解 $3x^2-3=-1$，得 $x=\pm\sqrt{2/3}$。又 $y=x(2/3-3)=-7x/3$，所以正、负横坐标分别给出对应切点。

答案　两点为 $(s,-7s/3)$，其中 $s=\pm\sqrt{2/3}$。

对应方法　09-2、09-3。

基于公开真题风格的推测　2019 年第 19 题同时考切线和法线，2009 年第 15 题由方向反求横坐标。

延伸题 2　切线斜率无穷时的两条线

求圆 $x^2+y^2=4$ 在 $(2,0)$ 处的切线和法线。

解题线索　半径方向垂直于切线，或用非零参数切向量。

反套路点　直接用 $dy/dx=-x/y$ 无法得到有限值，但两条直线都存在。

解析　在 $(2,0)$，半径方向为 $(2,0)$。圆上 $\mathbf{r}(t)=(2\cos t,2\sin t)$，在 $t=0$ 切向量 $(0,2)$，因此切线竖直、法线水平。

答案　切线 $x=2$，法线 $y=0$。

对应方法　09-3、09-2。

基于公开真题风格的推测　2017 年第 18 题由隐式曲线确定切线，2019 年第 19 题把切线方向转成法线方向。

题型10：单调性、极值与区间最值

10.1 思维导图与方法总览

在闭区间上求最小值，要比较哪些点?

2020 年第 4 题（汇编第 11 页，题意摘述）　求 $f(x)=x^2+1$ 在 $[-1,2]$ 上的最小值。

在区间内部，$f'(x)=2x$ 只在 0 处等于零。把它和两端 $-1,2$ 一起代回原式。

$$f(-1)=2,\qquad f(0)=1,\qquad f(2)=5$$

三个值中最小的是 1，在 $x=0$ 处取得。题目问最小值时，答案应写函数值。

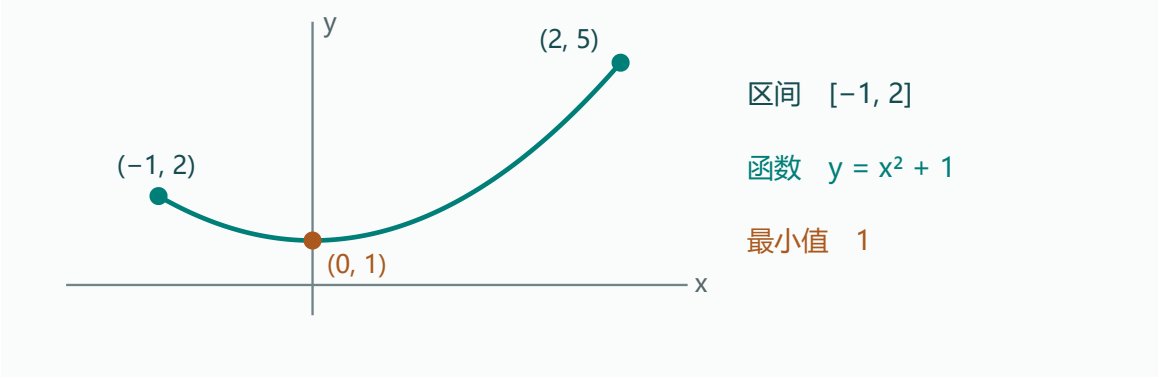

图 10-1　闭区间端点也要参加比较。只看实线这一段，依次读左端点、驻点和右端点的高度，最低的是中间的点。

同类题怎样选方法

本题型共 5 个方法。

```
单调性、极值与区间最值
├─ 10-1 列一阶导数符号表
├─ 10-2 比较候选点与区间端点
├─ 10-3 按单调或极值条件反求参数
├─ 10-4 用定义核对不可导点或端点
└─ 10-5 对驻点用二阶导数判别
```

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

```
以 2008 年第 24 题为例
x     (-∞,-1) | -1 | (-1,0) | 0      | (0,+∞)
f'       +    | 0  |   -    | 不存在 |    +
f        ↗    | 极大|   ↘    | 极小   |    ↗
```

读图时按横坐标从左向右走，导数从正变负处是局部峰，从负变正处是局部谷，尖点也要参与判断。

10-1 列一阶导数符号表

什么时候用 求单调区间、或导数符号可因式分解

1. 先求定义域和 f'。
2. 以驻点、不可导点及断点分段查符号。
3. 把正负区间写为升降区间并判断能否拼接。

用到的公式或定理 在可导区间，$f'>0$ 推出严格递增，$f'<0$ 推出严格递减。

易错点 导数零点也可能两侧同号。

对应真题 2021 年第 13 题、2018 年第 5 题、2018 年第 13 题、2011 年第 15 题。

10-2 比较候选点与区间端点

什么时候用 给闭区间，问最大或最小

1. 找所有内部候选点。
2. 算候选点与两端的实际值。
3. 比较并写出数值及取值位置。

用到的公式或定理 闭区间上连续函数必取到最值。

易错点 忘记任一端点或不可导点。

对应真题 2020 年第 4 题、2014 年第 16 题、2007 年第 23 题、2006 年第 30 题。

10-3 按单调或极值条件反求参数

什么时候用 已知某点极值或某段单调，反求参数

1. 用极值点位置或导数符号列条件。
2. 有极值数值时再列点值等式。
3. 解参数并回代验证。

用到的公式或定理 内点可导且取极值时 $f'(x_0)=0$。

易错点 把驻点条件当充分条件。

对应真题 2018 年第 14 题、2012 年第 6 题、2006 年第 24 题。

10-4 用定义核对不可导点或端点

什么时候用 题中有尖点、端点或只问必要条件

1. 列定义域内的可能变界。
2. 局部比较实际函数值或用单侧单调。
3. 必要时给反例区分条件方向。

用到的公式或定理 极小的局部条件是 $f(x)\geq f(x_0)$ 于相对邻域。

易错点 不可导点也能取得极值。

对应真题 2017 年第 6 题、2008 年第 24 题、2020 年第 4 题、2010 年第 5 题。

10-5 对驻点用二阶导数判别

什么时候用 已找到驻点且二阶导数明显非零

1. 先验 $f'(x_0)=0$。
2. 求 $f''(x_0)$。
3. 按正负判断；若为零，回到一阶符号。

用到的公式或定理 驻点且 $f''>0$ 给局部极小，驻点且 $f''<0$ 给局部极大。

易错点 二阶导数为零时检验失效。

对应真题 2018 年第 6 题、2018 年第 14 题、2012 年第 6 题、2011 年第 15 题。

10.2 核心概念与通俗解释

单调与驻点 一直走高并不要求每一瞬的坡度都大于零。

严格递增要求任意 $x_1<x_2$ 有 $f(x_1)<f(x_2)$；驻点指导数为零。 借符号表看某点前后是上升还是下降。

容易出错的地方：认为驻点一定是极值。

极值与最值 局部小山峰与整段最高点是两回事。

极值比较某个点的附近，最值比较题给的全部区间。 闭区间最大最小必须和端点比较。

容易出错的地方：找到极大值就停止比较。

不可导点与闭区间端点 山峰可以是尖的，也可以正好在旅程终点。

导数法搜寻的是候选而非全部结论，端点和尖点需单列。 查绝对值、根式以及边界。

容易出错的地方：只列方程 $f'=0$ 的根。

二阶判别 先确认走到平坦处，再看地形是碗还是坡顶。

仅在驻点二阶导数非零时可直接判局部极值。 用作验证或简化符号判断。

容易出错的地方：无驻点条件便直接判极值。

10.3 真题归类总结

本章共 17 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

列一阶导数符号表（10-1）

2021 年第 13 题 • 汇编第 6 页 三次多项式的单调递减区间

$f'=6(x-1)(x-2)$，在两根之间为负，故下降段为 $(1,2)$（若采用含端点的单调区间记法，可写 $[1,2]$）。

易错点：不能只解 $f'=0$。

2018 年第 5 题 • 汇编第 23 页　已知 $f'>0$ 比较 $f(0),f(1)$

在 $[0,1]$ 上连续且在内部 $f'>0$，由拉格朗日中值定理得 $f(1)-f(0)=f'(\xi)>0$。端点函数值的正负仍无从确定。 同题出处另见 2009 年第 8 题。

易错点：端点的符号无法由单调性推出。

2018 年第 13 题 • 汇编第 24 页　$f'=(x+2)(x-2)$ 的递减区间

开口向上的二次式在 $-2<x<2$ 为负，故主要下降段为 $(-2,2)$。

易错点：区分 f 与 f' 自身的单调性。

2011 年第 15 题 • 汇编第 66 页　$f(x)=\int_{1/2}^{x}\ln t\,dt$ 的极值点

在 $x>0$ 有 $f'(x)=\ln x$，左负右正，故 $x=1$ 是极小值点。　（配合 10-5）

易错点：积分下限 $1/2$ 不是驻点。

2010 年第 5 题 • 汇编第 71 页　判断 $x=0$ 是否为指数函数的极值点

对 e^{x^2+2x} 求导，在 0 得 $2\neq 0$；由费马定理，此内点既非驻点也非极值点。　（配合 10-4）

易错点：零点是 $f(x)=0$，驻点是 $f'(x)=0$。

2009 年第 8 题 • 汇编第 77 页　由闭区间连续、开区间 $f'>0$ 比较端点

与 **2018 年 / 册页 23 / 第 5 题** 共用本节解析。区间内每点的导数条件才能这样比较。

易错点：区间内每点的导数条件才能这样比较。

2006 年第 15 题 • 汇编第 96 页　$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的递增区间

根式大于 $|x|$，定义域是全实数。导数为 $1/\sqrt{1+x^2}>0$，全实轴递增。

易错点：别误把 $x>0$ 当对数条件。

比较候选点与区间端点（10-2）

2020 年第 4 题 • 汇编第 11 页　x^2+1 在 $[-1,2]$ 的最小值

候选点为 $-1,0,2$，函数值为 $2,1,5$，故最小值 1。也可直接用 $x^2\geq 0$。　（备用或配合 10-4）

易错点：求值而非只写取值点。

2014 年第 16 题 • 汇编第 48 页　积分函数在 $[-2,1/2]$ 的最小值点

由变上限求导得 $f'=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$，在开区间内为负，故最小值点在右端 $x=1/2$。（配合 10-1）

易错点：此题要点的位置。

2007 年第 23 题 • 汇编第 91 页　$x/(1+x^2)$ 在 $[-2,2]$ 的最值

导数 $(1-x^2)/(1+x^2)^2$ 给驻点 ±1。比较 $f(\pm1)=\pm1/2$、$f(\pm2)=\pm2/5$，最大 $1/2$，最小 $-1/2$。（配合 10-1）

易错点：闭区间要把两端加入比较。

2006 年第 30 题 • 汇编第 100 页　变上限积分函数在题给闭区间上的最大、最小值

先以积分上限代入被积函数求导，找出区间内驻点，再把驻点和两个端点的积分值列在同一表中比较。照片的被积式细节和区间右端待确认，数值答案待确认。　（配合 10-1）

易错点：题型可判，不能用模糊端点计算。

按单调或极值条件反求参数（10-3）

2018 年第 14 题 • 汇编第 24 页　ax^2+2x+c 在 1 取极值 2

由 $f'(1)=2a+2=0$ 得 $a=-1$，由 $f(1)=2$ 得 $c=1$，且 $f''=-2<0$ 验证极大。　（配合 10-5）

易错点：给的是极值还要列点值式。

2012 年第 6 题 • 汇编第 59 页　ax^2+x+1 在 $x=1$ 取得极大值

$2a+1=0$ 得 $a=-1/2$；二阶导数 $2a=-1<0$，符合极大值。　（配合 10-5）

易错点：驻点候选还应检查极值性质。

2006 年第 24 题 • 汇编第 98 页　x^3+ax^2+bx 在 1 有极值 -2

列 $a+b=-3$ 和 $2a+b=-3$，得 $a=0,b=-3$。此时 $f''(1)=6>0$，确为极小值。　（配合 10-5）

易错点：极值与驻点值分别列式。

用定义核对不可导点或端点（10-4）

2017 年第 6 题 • 汇编第 29 页　极大值点的必要条件

若内点可导，则由费马定理 $f'(x_0)=0$。若不可导也可能极大，如 $-|x-x_0|$。因此必有导数为零或不存在这一项。

易错点：题设未承诺二阶导数存在。

2008 年第 24 题 • 汇编第 85 页　$y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间与极值

在 $x\neq0$ 有 $y'=2+2/\sqrt[3]{x}$。三段 $(-\infty,-1),(-1,0),(0,\infty)$ 符号为正、负、正，故 $y(-1)=1$ 为极大值，$y(0)=0$ 为极小值。　（配合 10-1）

易错点：不可导的 0 必须作为分界候选。

对驻点用二阶导数判别（10-5）

2018 年第 6 题 • 汇编第 23 页　驻点处 $f''(x_0)<0$ 判定极值

题设 $f'(x_0)=0$ 且二阶导数负，驻点两侧一阶导数由正变负，故取极大值。

易错点：极大值是局部结论。

10.4 反套路延伸题

延伸题 1　最大值落在闭区间边界

找 $f(x)=x^4-2x^2$ 在 $[-1/2,2]$ 上的最值及取值点。

解题线索　找 $f'=4x(x^2-1)$ 的区间内根，再查端点。

反套路点　左右两个极小点中只有一个在区间内，最大值也不是驻点。

解析　内部候选为 $0,1$；加上 $-1/2,2$，四值分别是 $0,-1,-7/16,8$。逐个比较即可。

答案　最大值 8 在 2 取得，最小值 -1 在 1 取得。

对应方法　10-2、10-1。

基于公开真题风格的推测　2020 年第 4 题考闭区间最值，2007 年第 23 题需要把端点和驻点统一比较。

延伸题 2　二阶导数为零也有极值

设 $f_a(x)=x^4+ax^2$。判断 $x=0$ 对各个 a 分别是极大还是极小。

解题线索　分解 $f_a(x)-f_a(0)=x^2(x^2+a)$。

反套路点　临界参数 $a=0$ 时二阶判别无结论，按实际函数值仍能判。

解析　当 $a>0$，差在两侧严格正；当 $a=0$，差是 $x^4>0$；当 $a<0$，取 $0<|x|<\sqrt{-a}$，差严格负。

答案　$a<0$ 时为严格极大，$a\geq 0$ 时为严格极小。

对应方法　10-3、10-4。

基于公开真题风格的推测　2018 年第 14 题从极值反求参数，2017 年第 6 题区分极值与导数条件。

题型11：曲线凹凸性与拐点

11.1 思维导图与方法总览

二阶导数等于零，就能写下拐点吗?

2022 年第 8 题（汇编第 2 页，题意摘述）　求 $y = x^3 - 3x^2$ 的拐点。

求得 $y'' = 6x - 6$。在 $x = 1$ 左边它为负，右边为正，所以曲线经过这一点时改变了弯曲方向。

$$y(1) = 1 - 3 = -2$$

拐点是 $(1, -2)$。先验证两侧变号，再代回原式求纵坐标。

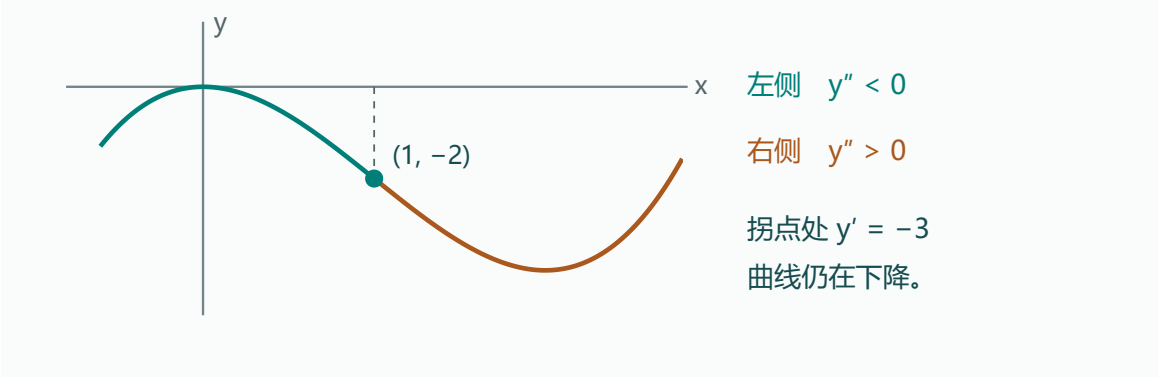

图 11-1　拐点两边的弯曲方向。沿曲线从左到右，斜率先减小再增大；在标出的点改变的是弯曲方向。

同类题怎样选方法

本题型共 4 个方法。

```
曲线凹凸性与拐点
├─ 11-1 用二阶导数符号判断
├─ 11-2 检查分界点两侧凹凸是否改变
├─ 11-3 用一阶导数的单调性判断
└─ 11-4 读图辨认弯曲方向及极值与拐点
```

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

```
以 2022 年第 8 题为例
x       (-∞,1)  |  1  |  (1,+∞)
f″         -    |  0  |     +
弯曲      向下   | 拐点 |    向上
```

读图时看的是二阶导数在候选点的两侧是否变号，最中间的零本身只给候选。

11-1 用二阶导数符号判断

什么时候用 可求二阶导数，问凹凸区间

1. 求 f''。
2. 用零点与不可导点分段。
3. 判断 f'' 的符号并给弯曲方向。

用到的公式或定理 本册用语 $f''>0$ 为凹、弯向上，$f''<0$ 为凸、弯向下。

易错点 不要将术语和几何方向混用。

对应真题 2022 年第 8 题、2020 年第 7 题、2017 年第 13 题、2016 年第 21 题。

11-2 检查分界点两侧凹凸是否改变

什么时候用 求拐点或题给拐点反推参数

1. 找二阶导数为零或无定义的候选。
2. 查两侧是否真正改变凹凸。
3. 把横坐标代回原式或用题给坐标列方程。

用到的公式或定理 拐点是连续曲线上凹凸性改变的点。

易错点 $f''=0$ 只是常见候选条件。

对应真题 2021 年第 6 题、2008 年第 7 题、2022 年第 8 题、2016 年第 21 题。

11-3 用一阶导数的单调性判断

什么时候用 已知 f' 单调、f'' 符号或两个条件联立

1. 区分函数值和斜率。
2. 将 f'' 的符号转换为 f' 的单调性。
3. 判断是否还需利用严格递增条件。

用到的公式或定理 对可导函数，f' 不减对应弯向上。

易错点 只凭 f 递增不能确定曲线弯向。

对应真题 2019 年第 7 题、2020 年第 7 题、2016 年第 7 题。

11-4 读图辨认弯曲方向及极值与拐点

什么时候用 题面直接给曲线草图

1. 定位所问区间及关键点。
2. 沿横坐标增加方向看斜率是变大还是变小。
3. 区分极值与拐点。

用到的公式或定理 极值关注 f' 的符号，拐点关注弯曲方向改变。

易错点 峰顶或谷底不一定是拐点。

对应真题 2016 年第 7 题、2021 年第 6 题。

11.2 核心概念与通俗解释

凹凸和术语 在上坡的同时，坡度既可能越来越陡，也可能越来越平。

按试卷语境，斜率递增对应凹、开口向上，斜率递减对应凸、开口向下。 同步写出 f'' 的正负和几何方向。

容易出错的地方：不同教材的凹凸中文命名可能不同。

拐点 像道路由向一边弯改为向另一边弯。

曲线连续经过该点且两侧的弯曲方向相反。 在候选点左右各验一个子区间。

容易出错的地方：二阶导数为零就认定拐点。

二阶导数零点与不存在点 弯曲方式可能在光滑位置变，也可能在比较尖或陡的点变。

都是检查凹凸变化的候选；二阶导数在拐点可以不存在。 结合图像和单侧符号。

容易出错的地方：漏查定义域内没有二阶导数的点。

11.3 真题归类总结

本章共 17 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

用二阶导数符号判断（11-1）

2022 年第 8 题 • 汇编第 2 页 $y=x^3-3x^2$ 的拐点

$y''=6x-6$ 在 $x=1$ 由负转正，代原式得 $(1,-2)$。 （配合 11-2）

易错点：拐点坐标含纵坐标。

2020 年第 7 题 • 汇编第 12 页 x^3 在负半轴的单调与凹凸

$f'=3x^2>0$，$f''=6x<0$，所以递增且按试卷术语为凸（弯向下）。 （配合 11-3）

易错点：递增与弯曲方向分别判断。

2017 年第 13 题 • 汇编第 30 页 $x^3-\frac{3}{2}x^2+1$ 的凹区间

$f''=6x-3$，按试卷术语为凹（弯向上）的开区间是 $(1/2,+\infty)$。

易错点：此题问区间而非拐点。

2016 年第 21 题 • 汇编第 38 页 已知 x^3+ax^2+b 的拐点是 $(1,-1)$

$f''(1)=6+2a=0$ 得 $a=-3$；由 $1+a+b=-1$ 得 $b=1$。此时 f'' 在 1 变号。 （配合 11-2）

易错点：给定拐点的两个坐标提供两个条件。

2015 年第 5 题 • 汇编第 41 页 x^3 在正半轴的单调与凹凸

在 $x>0$，$f'=3x^2>0$、$f''=6x>0$，所以递增且凹（弯向上）。

易错点：区间是正半轴。

2014 年第 4 题 • 汇编第 47 页　x^2-2x+3 在 $(-\infty,1]$ 的性态

$f'=2x-2<0$ 于内部，$f''=2>0$，所以在题给区间递减且凹（弯向上）。

易错点：端点导数为零不改变整段的单调性。

2013 年第 15 题 • 汇编第 54 页　$x^2(3-x)$ 的拐点

$f''=6-6x$ 在 1 变号，$f(1)=2$，拐点 $(1,2)$。　(配合 11-2)

易错点：先变号再代回原函数。

2012 年第 16 题 • 汇编第 60 页　$2x^3-3x^2+4$ 的拐点

$f''=12x-6$ 在 $1/2$ 变号，代原式得 $f(1/2)=7/2$，拐点 $(1/2,7/2)$。　(配合 11-2)

易错点：不要把 f'' 的零当纵坐标。

2011 年第 7 题 • 汇编第 66 页　已知 $f'>0, f''>0$ 的性质

前者给严格递增，后者给凹（弯向上），符合题列相应组合。

易错点：两个导数分别对应斜率和斜率变化。

2010 年第 16 题 • 汇编第 72 页　xe^{-x} 的拐点

$f''=(x-2)e^{-x}$，在 2 变号，拐点 $(2,2e^{-2})$。　(配合 11-2)

易错点：指数因子恒正。

2009 年第 17 题 • 汇编第 78 页　$e^{-(x-1)^2}$ 的拐点横坐标

$f''=[4(x-1)^2-2]e^{-(x-1)^2}$，两零点 $1\pm1/\sqrt{2}$ 均变号。　(配合 11-2)

易错点：只问横坐标，也需查两根。

2008 年第 17 题 • 汇编第 84 页　$1+\sqrt[3]{x}$ 的凹区间

$f''=-2/(9x^{5/3})$，在 $x<0$ 为正、在 $x>0$ 为负。因此凹（弯向上）的区间为 $(-\infty,0)$。　(配合 11-2)

易错点：实立方根在负半轴照样有定义。

2006 年第 7 题 • 汇编第 96 页　$x\arctan x$ 的凹凸性

算出 $f'=\arctan x+x/(1+x^2)$，再求 $f''=2/(1+x^2)^2>0$，全实轴凹（弯向上）。

易错点：两项二阶导要通分后判断。

检查分界点两侧凹凸是否改变（11-2）

2021 年第 6 题 • 汇编第 6 页　$x^{1/3}$ 的单调性与拐点

立方根在全实轴严格递增，且 $f''(x)=-2/(9x^{5/3})$ 在零点左右变号，函数在 $(0,0)$ 连续，故有拐点。（配合 11-4）

易错点：二阶导数在拐点可以不存在。

2008 年第 7 题 • 汇编第 83 页　$f''(x_0)=0$ 与拐点的关系

若 $f''(x_0)$ 存在且两侧凹凸改变，那么它必须为零；$f(x)=x^4$ 说明为零不足。放开二阶导数存在条件，$x^{1/3}$ 是拐点但二阶导数不存在。题面如按默认二阶可导语境解为必要非充分；官方答案口径待确认。（配合 11-1）

易错点：先看是否预设该点二阶导数存在。

用一阶导数的单调性判断（11-3）

2019 年第 7 题 • 汇编第 18 页　严格递增且凹的二阶可导函数

凹给 $f''\geq 0$，从而 f' 不减。严格递增给 $f'\geq 0$；若内点 $f'=0$，左侧一段就有 $f'\equiv 0$，与严格递增矛盾。故 $f'>0$ 且 $f''\geq 0$。　（配合 11-1）

易错点：单独的严格递增不能推出导数处处大于零；这里还用了凹性。

读图辨认弯曲方向及极值与拐点（11-4）

2016 年第 7 题 • 汇编第 35 页　从图判断 $[1,+\infty)$ 上的状态

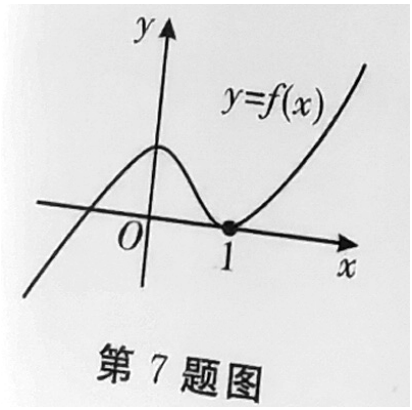

图 11-2　2016 年第 7 题试卷原图。从标有 1 的点向右追踪曲线：高度增加，切线也逐渐变陡。

第 35 页画出曲线，备选项在第 36 页。沿图在 $x=1$ 后曲线向右上升且斜率总体增大，故单调增加且凹（弯向上）。　（配合 11-3）

易错点：只读题目指定区间。

11.4 反套路延伸题

延伸题 1　二阶不存在也未改变凹凸

判 $f(x)=|x|^{4/3}$ 在 $x=0$ 是否为拐点，并判断两侧弯曲方向。

解题线索　分别在正负半轴写 f''。

反套路点　零点二阶导数不存在，却没有凹凸转换。

解析　在 $x\neq 0$ 时 $f''=(4/9)|x|^{-2/3}>0$。一阶导数在 0 为 0 且两侧整体递增，零点处未发生凹凸改变。

答案　两侧均弯向上，0 不是拐点。

对应方法　11-2、11-1。

基于公开真题风格的推测　2021 年第 6 题通过立方根识别拐点，2008 年第 7 题考查二阶导数与拐点的必要条件。

延伸题 2　由两个横坐标确定两点的高度

设 $f(x)=x^4-ax^2$ 的拐点横坐标为 $-1,1$。求 a、两个拐点及弯曲区间。

解题线索　$f''=12x^2-2a$，两点代入等于零。

反套路点　两个候选虽然对称，仍需查中间与两侧是否变号。

解析　得 $a=6$，这时 $f''=12(x^2-1)$，在 $(-1,1)$ 为负、两侧为正。将 ±1 代入原式，均得 -5。

答案　$a=6$，拐点 $(-1,-5),(1,-5)$；中间弯向下，两侧弯向上。

对应方法　11-2、11-1。

基于公开真题风格的推测　2016 年第 21 题用拐点反推参数，2009 年第 17 题出现两个拐点。

题型12：中值定理与不等式证明

12.1 思维导图与方法总览

怎样检查一个函数是否满足罗尔定理?

2015 年第 6 题（汇编第 41 页，题意摘述）　考察选项中的 $f(x)=x^2+1$，区间为 $[-1,1]$。

多项式在闭区间上连续，在开区间内可导。剩下要查的是两端高度，$f(-1)=f(1)=2$，第三个条件也成立。

$$f'(x)=2x,\qquad f'(0)=0$$

这个选项符合条件。图像从同一高度出发又回到同一高度，中间确实有一处切线水平。

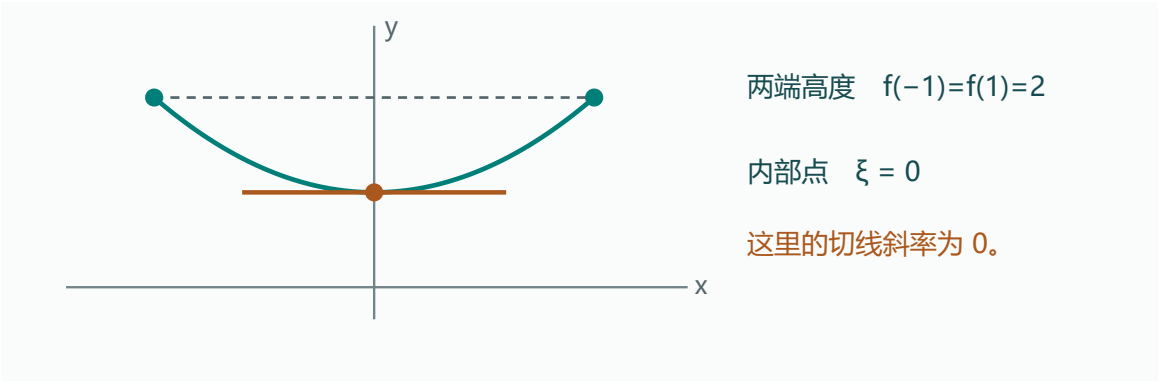

图 12-1　罗尔定理中的水平切线。两个实心端点同高；沿抛物线走到中间，找到与连接端点的虚线平行的切线。

同类题怎样选方法

本题型共 4 个方法。

```
中值定理与不等式证明
├─ 12-1 检查罗尔定理的前提并定位中值点
├─ 12-2 使用拉格朗日中值定理及导数界
├─ 12-3 构造差函数并用单调性证明
└─ 12-4 直接比较两边的符号或大小
```

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

12-1 检查罗尔定理的前提并定位中值点

什么时候用 闭区间两端同值，题问导数零点

1. 验证闭区间连续、开区间可导。
2. 直接查端点同值，或构造满足的辅助函数。
3. 结论写为至少一个内点导数为零。

用到的公式或定理 若 $F(a)=F(b)$ 且满足上述正则性，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$。

易错点 不能据此声称零点唯一。

对应真题 2017 年第 5 题、2015 年第 6 题、2014 年第 6 题、2012 年第 5 题。

12-2 使用拉格朗日中值定理及导数界

什么时候用 出现平均变化率、两点差或导数界

1. 在题定区间核对正则性。
2. 写出割线斜率等于某点导数。
3. 解中值点或用导数界夹住割线。

用到的公式或定理 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

易错点 中值点在开区间，别把等号放到端点。

对应真题 2017 年第 10 题、2013 年第 16 题、2011 年第 31 题、2010 年第 15 题。

12-3 构造差函数并用单调性证明

什么时候用 两边复杂，某个基准点容易比较

1. 令 $F=$ 左边减右边。
2. 找 F 在基准点的值。
3. 用 F' 符号推出题给范围内的符号。

用到的公式或定理 若 $F(a)=0$ 且 $F'>0$ 于 (a,b)，则 $F(x)>0$ 于 (a,b)。

易错点 基准点必须在定义域内或用边界极限。

对应真题 2008 年第 31 题、2007 年第 31 题、2006 年第 31 题、2017 年第 10 题。

12-4 直接比较两边的符号或大小

什么时候用 两边直接有符号或简单界

1. 查定义域。
2. 把两边放在同一个常数或显然有序的量两侧。
3. 说明何处为严格不等。

用到的公式或定理 若 $u<0<v$，立即得 $u<v$。

易错点 边界处可能为等号。

对应真题 2013 年第 31 题。

12.2 核心概念与通俗解释

闭区间连续和开区间可导 走完整条路得连续，中间每处要能测斜率。

端点需要能接上，斜率只需在区间内部存在。 逐条检查条件以排除干扰。

容易出错的地方：把端点可导当成罗尔和拉格朗日的硬要求。

罗尔定理 上山再回到同一高度，中间有一次坡度为零。

两端同值且满足正则性，内部至少有一个零导数点。 常构造两端都为零的辅助函数。

容易出错的地方：保证存在就等于保证唯一。

拉格朗日中值定理 整段平均速度等于某一瞬间的速度。

内部存在一处切线与两端割线平行。 解 ξ 或用统一导数界控制差值。

容易出错的地方：用结论倒推前提。

差函数 把两个量的间距单独当成一个函数。

通过左减右把大小问题改成与零比较。 由基准值和导数符号推出严格式。

容易出错的地方：不检查初始符号或比较方向。

12.3 真题归类总结

本章共 15 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

检查罗尔定理的前提并定位中值点（12-1）

2017 年第 5 题 • 汇编第 29 页 同端值时 $f'(x)=0$ 的解存在

题设可导给闭区间连续及内部可导，另有 $f(a)=f(b)$。罗尔定理保证至少一个内部点 ξ 使导数为零。

易错点：只保证至少一个。

2015 年第 6 题 • 汇编第 41 页 筛选满足罗尔定理条件的函数

在 $[-1,1]$，x^2+1 连续、内部可导且两端同值。线性选项端值不等，绝对值在内点不可导，有理选项在内点无定义。

易错点：三个条件要分别检验。

2014 年第 6 题 • 汇编第 47 页 求 $(x-1)^2$ 满足罗尔条件的区间

多项式已满足正则性。只需让端点关于 1 对称，所给选项中 $[-1,3]$ 两端函数值都是 4。

易错点：取端点函数值相等，不取导数相等。

2012 年第 5 题 • 汇编第 59 页 已知 $f=(x-1)(x-2)(x-3)$，问 $f'=0$ 根数

各相邻零点之间由罗尔定理至少各有一个，再由 f' 为二次多项式知至多两个，故恰有两个。

易错点：用次数给出上界才得到恰好。

2010 年第 31 题 • 汇编第 76 页　已知 $f(2)=0$，证明 $[(x-1)f(x)]'$ 有零点

令 $F(x)=(x-1)f(x)$。乘积继承闭区间连续和开区间可导，且 $F(1)=F(2)=0$，故由罗尔得 $\xi\in(1,2)$ 使 $F'(\xi)=0$。

易错点：端点为零的原因各不同。

2007 年第 6 题 • 汇编第 90 页　在 $[-1,1]$ 判断罗尔定理适用项

$f(x)=x^2$ 连续、内部可导且两端同值。$|x|$ 内点不可导，x 两端异值，实立方根类选项在题给内点不满足可导条件。

易错点：连续不足以保证能用罗尔。

使用拉格朗日中值定理及导数界（12-2）

2017 年第 10 题 • 汇编第 30 页　严格割线斜率界与严格导数界

若处处 $|f'|<1$，由中值定理所有不同点的割线斜率绝对值都小于 1。反向只推出 $|f'|\le 1$；取 $f(x)=\arctan x$，导函数在 0 为 1 且其余处小于 1，积分平均严格小于 1。所以题给割线条件是严格导数界的必要非充分条件。　（配合 12-3）

易错点：过极限时严格不等号可变成等号。

2013 年第 16 题 • 汇编第 54 页　$2e^x$ 在 $[0,1]$ 上的中值点

平均斜率 $2(e-1)$，令 $2e^{\xi}=2(e-1)$，得 $\xi=\ln(e-1)\in(0,1)$。

易错点：中值点是自变量。

2011 年第 31 题 • 汇编第 70 页　证明对数的双边界

对 $\ln x$ 在 $[a,b]$ 用中值定理，$\ln(b/a)=(b-a)/\xi$，$a<\xi<b$，于是 $(b-a)/b<\ln(b/a)<(b-a)/a$。　（配合 12-3）

易错点：倒数反序且 a,b 均正。

2010 年第 15 题 • 汇编第 72 页　$\arctan x$ 在 $[0,1]$ 的中值点

割线斜率为 $\pi/4$，解 $1/(1+\xi^2)=\pi/4$，取区间内正根 $\xi=\sqrt{4/\pi-1}$。

易错点：负根不在指定区间。

2009 年第 16 题 • 汇编第 78 页　$\sqrt{x}$ 在 $[1,4]$ 的中值点

割线斜率为 $(2-1)/(4-1)=1/3$，解 $1/(2\sqrt{\xi})=1/3$ 得 $\xi=9/4$。

易错点：检验结果确在开区间内。

构造差函数并用单调性证明（12-3）

2008 年第 31 题 • 汇编第 88 页　证明 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$

对左减右得 $F(0)=0$。求导时两项 $x/\sqrt{1+x^2}$ 抵消，得 $F'=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$ 于 $x>0$，故 $F(x)>0$。

易错点：比较从能代入的锚点 0 出发。

2007 年第 31 题 • 汇编第 94 页　证明 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$ 并推出整数式

令 $F=\ln(1+x)-x/(1+x)$，$F(0)=0$，$F'=x/(1+x)^2>0$。再代 $x=1/n$ 得 $1/(n+1)<\ln(1+1/n)$。　(配合 12-2)

易错点：第二问取 $1/n$，不是取 n。

2006 年第 31 题 • 汇编第 100 页　证明 $x>0$ 时的对数下界

将照片所示两边相减，取 $F(x)=\ln(1+x)-x+x^2/2$，$F(0)=0$，$F'(x)=1/(1+x)-1+x=x^2/(1+x)>0$，故不等式成立。

易错点：严格性来自 $x>0$。

直接比较两边的符号或大小（12-4）

2013 年第 31 题 • 汇编第 58 页　证明 $x<0$ 时 $2\arctan x<\ln(1+x^2)$

左侧因反正切递增且 $\arctan 0=0$ 而为负；右侧因 $1+x^2>1$ 而为正，直接得证。

易错点：先检查两侧符号，能省去构造差函数。

12.4 反套路延伸题

延伸题 1　同一笔变化量的两个界

对 $x>0$ 证明 $\ln(1+x)<x<(1+x)\ln(1+x)$。

解题线索　$\ln t$ 在区间 $[1,1+x]$ 上导数介于两个倒数之间。

反套路点　同一次中值估计要同时提供上界和下界。

解析　由中值得 $\ln(1+x)=x/\xi$，$1<\xi<1+x$，因此 $x/(1+x)<\ln(1+x)<x$。将左侧不等式乘正数 $1+x$ 即得所求。

答案　给出的两个严格式对所有 $x>0$ 均成立。

对应方法　12-2、12-3。

基于公开真题风格的推测　2011 年第 31 题用对数的双边界，2007 年第 31 题把对数下界改写成分式。

延伸题 2　改造端点值来造零导数

设 f 在 $[0,2]$ 连续、$(0,2)$ 可导。证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使 $f(\xi)-f(2)+\xi f'(\xi)=0$。

解题线索　所求左边正是 $x[f(x)-f(2)]$ 的导数。

反套路点　未给 $f(0)=f(2)$，须由目标式逆认乘积导数。

解析　设 $F(x)=x[f(x)-f(2)]$。端点 0 的因子 x 为零，端点 2 的方括号为零。F 继承连续及可导条件，罗尔定理给 $F'(\xi)=0$。展开即为所求。

答案　至少存在一个这样的 ξ。

对应方法　12-1。

基于公开真题风格的推测　2010 年第 31 题通过乘积制造两端同值，2017 年第 5 题考同端函数的导数零点。

题型13：方程实根、交点个数与参数范围

13.1 思维导图与方法总览

水平线平移时，交点数在哪里改变?

2022 年第 24 题（汇编第 4 页，题意摘述）　考察 $f(x)=e^x-ex$ 与水平线的交点。

导数 $f'(x)=e^x-e$ 在 1 左侧为负、右侧为正，因此两支在 $(1,0)$ 相接。向左、向右走远，函数值都趋于正无穷。

$$f(1)=0,\qquad f''(x)=e^x>0$$

水平线高度小于零时无交点，等于零时有一个，大于零时有两个。最低点同时属于两支，只能数一次。

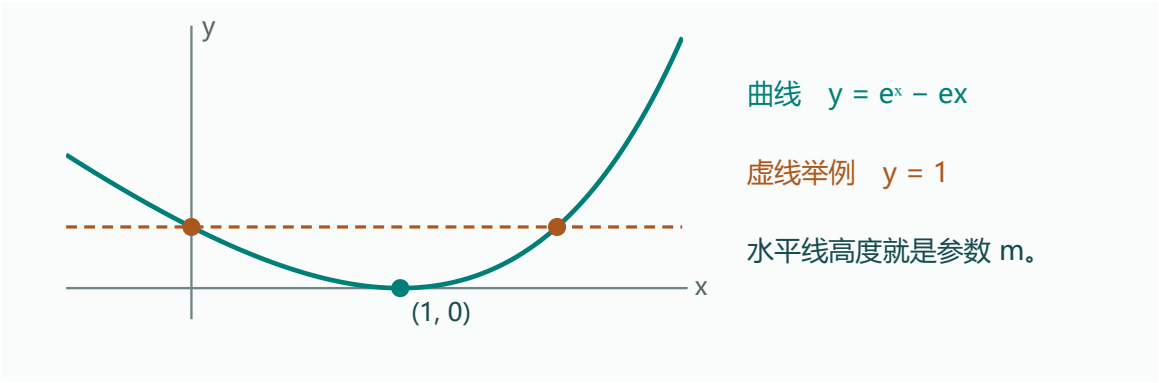

图 13-1　用水平线数方程的根。把水平线从最低点下方向上移：低于零时无交点，经过谷底时一个，再往上时两个。

同类题怎样选方法

本题型共 4 个方法。

```
方程实根、交点个数与参数范围
├─ 13-1 用零点定理或其反证应用判断存在性
├─ 13-2 用严格单调性证唯一
├─ 13-3 按各单调支的值域数交点
└─ 13-4 构造差函数或分析根附近的符号
```

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

```
以 2020 年第 24 题为例
左支 (−∞, 1] ── 递增 ── 值域 (−∞, 1/e]
右支 [1, +∞) ── 递减 ── 值域 (0, 1/e]
共同点 x=1，达到高度 1/e 时只计一个交点
```

读图时在两行值域上同时标出水平高度，落在两支内才可能有两交点，再排除共同峰顶。

13-1 用零点定理或其反证应用判断存在性

什么时候用 问至少一根，或给连续无根想推同号

1. 将等式或关系改成 $h(x)=0$。
2. 查连续性及两点异号。
3. 应用零点定理，或用异号会导出零点作反证。

用到的公式或定理 h 在 $[a,b]$ 连续且 $h(a)h(b)<0$，则 (a,b) 有零点。

易错点 必要时还需另证明唯一。

对应真题 2017 年第 4 题、2014 年第 25 题、2012 年第 31 题、2009 年第 31 题。

13-2 用严格单调性证唯一

什么时候用 已经能证明某段严格单调

1. 求导或直接比较。
2. 证明每个目标水平至多取一次。
3. 与端点异号或值域配合，判断是否恰有一根。

用到的公式或定理 严格单调函数在一段上是单射。

易错点 单调只给至多一个，尚不确定存在。

对应真题 2022 年第 24 题、2021 年第 24 题、2020 年第 24 题、2019 年第 24 题。

13-3 按各单调支的值域数交点

什么时候用 题问交点个数或实根个数随参数变化

1. 求单调分界和两端极限。
2. 列各支的实际值域。
3. 用参数水平线逐段计数，公共端点去重。

用到的公式或定理 若 f 在一支上严格单调，$f(x)=m$ 在该支至多一根。

易错点 开端点或渐近值不能直接算进值域。

对应真题 2022 年第 24 题、2021 年第 24 题、2020 年第 24 题、2019 年第 24 题。

13-4 构造差函数或分析根附近的符号

什么时候用 比较斜直线或问某个根的局部性质

1. 构造差函数 $h=f-\ell$，或定位根的一侧。
2. 看 h 的符号、导数或差商。
3. 由零点与符号给交点或斜率结论。

用到的公式或定理 交点满足 $h(x)=0$；根处 $h(x_0)=0$ 可代入差商。

易错点 斜直线在不同横坐标有不同高度。

对应真题 2018 年第 23 题、2015 年第 10 题、2014 年第 25 题。

13.2 核心概念与通俗解释

零点与交点　两条路高度一样时就相遇。

方程 $f=g$ 等价于差函数为零，每个合法横坐标给一个交点。 同一工具处理函数根和图像交点。

容易出错的地方：移项变形后把原定义域之外的根算进来。

介值性与唯一性　路从地下走到地上必穿地面，严格上升使穿越不能重复。

连续把异号连接起来，严格单调限制只穿过一次。 证明恰一根时分别论证存在和至多一个。

容易出错的地方：把二者用途混在一起。

分支值域与重根　同一个山顶从两边都能走到，位置仍只有一个。

用每个实际单调支的取值来数不同解，重根对应的一个交点只记一次。 列支和值的端点并检查参数临界值。

容易出错的地方：将同一分界点算两遍，或把极限值当作取值。

13.3 真题归类总结

本章共 11 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

用零点定理或其反证应用判断存在性（13-1）

2017 年第 4 题 • 汇编第 29 页　$x^3=1-x$ 至少一根的区间

构造 $h=x^3+x-1$，有 $h(0)=-1, h(1)=1$，连续性保证 $(0,1)$ 有根。另 $h'>0$ 可证其唯一。

易错点：先移到同一边。

2014 年第 25 题 • 汇编第 52 页　连续且 $f(x)\neq x$，能否同时在直线上下

设 $h=f-x$，连续且无零点。若存在一正一负的值，零点定理会给出中间零点，矛盾，所以不能同时存在题给的两点。　（配合 13-4）

易错点：比较的是 $f(x)-x$ 的符号。

2012 年第 31 题 • 汇编第 64 页　证明 $2x-\int_0^x f(t)\,dt=1$ 恰有一根

设 $h=2x-\int_0^x f-1$。有 $h(0)=-1$，由连续 $f<1$ 得 $h(1)=1-\int_0^1 f>0$，且 $h'=2-f>1$。由异号得存在，由严格递增得唯一。　（配合 13-2）

易错点：导数的严格正性与端点异号各有用途。

2009 年第 31 题 • 汇编第 82 页　方程 $e^x+1=4x^2$ 的正实根

令 $h=e^x+1-4x^2$，则 $h(0)=2>0$，$h(1)=e-3<0$，所以 $(0,1)$ 至少有一根。可用 $e=\sum_{n\geq 0}1/n!<3$ 说明端点不等式。

易错点：该题只需证明在给定区间存在。

按各单调支的值域数交点（13-3）

2022 年第 24 题 • 汇编第 4 页　$e^x - ex$ 的单调、凹凸与水平交点

$f' = e^x - e$ 在 1 由负变正，$f(1) = 0$ 为极小；$f'' = e^x > 0$，全轴凹（弯向上）。两端均趋 $+\infty$，两支在最小值之上各有一交点，故两交点当且仅当 $m > 0$。　（配合 13-2）

易错点：最低点只计一次。

2021 年第 24 题 • 汇编第 10 页　$x \ln x$ 的右极限、单调与恰一根

在 0^+，写成 $\ln x/(1/x)$ 用洛必达得 0。$f' = \ln x + 1$，在 $(0, e^{-1})$ 下降、在 (e^{-1}, ∞) 上升。最小值 $-1/e$；左支不取极限值 0，故 $f(x) = k$ 恰有一根当且仅当 $k = -1/e$ 或 $k \geq 0$。　（配合 13-2）

易错点：$x = 0$ 不在定义域。

2020 年第 24 题 • 汇编第 16 页　xe^{-x} 的定义域、单调与两交点

定义域为 $\mathbb{R}$。导数 $(1 - x)e^{-x}$ 给在 1 左增右减，最大值 $1/e$；左端趋 $-\infty$，右端趋 0^+。从两支值域得两交点当且仅当 $0 < m < 1/e$。　（配合 13-2）

易错点：在 $m = 0$ 只有 $x = 0$ 一根。

2019 年第 24 题 • 汇编第 22 页　$2 \ln x - x^2 + 2 = 0$ 的根数

定义域 $x > 0$，导数 $2/x - 2x$ 在 1 左正右负。峰值 $1 > 0$ 而 0^+ 与 $+\infty$ 两端都趋 $-\infty$。各单调支由连续性有且仅有一个零点，共两根。　（配合 13-1、13-2）

易错点：存在性和唯一性都应说明。

2017 年第 24 题 • 汇编第 34 页　$2x^3 - 3kx^2 + 1$ 的区间最值及三实根

$f' = 6x(x - k)$；$k = 1$ 时比较 $0, 1, 2$，最小值 0。一般 $k > 0$ 时在 0 有极大值 1，在 k 有极小值 $1 - k^3$。三严格单调段各交轴一次须 $1 - k^3 < 0$，所以 $k > 1$。　（配合 13-2）

易错点：$k = 1$ 的重根只算一个不同实根。

构造差函数或分析根附近的符号（13-4）

2018 年第 23 题 • 汇编第 27 页　由曲线的几何性态判断与斜直线的交点数

先由原式排除分母零点，分别用 f'、f'' 划分升降与弯曲区间及作图，再令 $h = f - \ell$ 数其零点。照片上分子小上标待确认，精确区间、图像与交点数待确认。　（配合 13-3）

易错点：交的是斜直线，直接数 f 的水平交点会答错。

2015 年第 10 题 • 汇编第 42 页　三次多项式的最小实根与该点导数

首项系数为正且左端趋 $-\infty$。在最小根 x_0 左边，连续性和无其他零点给 $f(x) < 0$，左差商 $(f(x) - 0)/(x - x_0) > 0$，故 $f'(x_0) \geq 0$。如有重根可等于零。　（配合 13-1）

易错点：左边无零点与左边值为负要分别说明。

13.4 反套路延伸题

延伸题 1　上升支从负值出发

求 $f(x)=(x-1)e^{-x}$ 与水平线 $y=m$ 有两个不同交点时的 m。

解题线索　$f'=(2-x)e^{-x}$，检查两段值域的重叠。

反套路点　右端极限仍为零，但左支过零的位置已变。

解析　在 $(-\infty,2]$ 严格增，值域 $(-\infty,e^{-2}]$；在 $[2,\infty)$ 严格减，值域 $(0,e^{-2}]$。两段都取到而且不在共同峰顶，要求 $0<m<e^{-2}$。

答案　$0<m<e^{-2}$。

对应方法　13-3、13-2。

基于公开真题风格的推测　2020 年第 24 题用指数乘一次项数水平交点，2021 年第 24 题需要区分渐近端点与实际点值。

延伸题 2　根可能恰在端点

设 g 在 $[0,1]$ 上连续且 $0\le g\le 1$。证明 $2x-\int_0^x g(t)dt=1$ 在 $[0,1]$ 恰一根，并说明何时根为 1。

解题线索　左端低于目标，导数至少为 1，条件决定右端取等。

反套路点　允许等号后，端点不一定异号，不能机械证明根在开区间。

解析　令 $H=2x-\int_0^x g-1$，则 $H(0)=-1$，$H(1)=\int_0^1(1-g)\ge 0$，且 $H'=2-g\ge 1$。右端为零时已是根，否则由介值定理有内点根。$H(1)=0$ 当且仅当连续非负函数 $1-g$ 恒为零。

答案　恰一根，且根为 1 当且仅当 $g\equiv 1$。

对应方法　13-1、13-2。

基于公开真题风格的推测　2012 年第 31 题以变上限积分构造增函数并证明唯一根，这里把严格界放宽。

题型14：原函数与不定积分

14.1 思维导图与方法总览

看到指数外面多了一个 x，该怎样换元?

2022 年第 20 题（汇编第 3 页，题意摘述）　求 $\int xe^{x^2+3}\,dx$。

令 $u=x^2+3$，则 $du=2x\,dx$。题面上的 $x\,dx$ 正好是 $du/2$，整个积分只剩一个变量。

$$\int xe^{x^2+3}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du=\frac{1}{2}e^{x^2+3}+C$$

对答案求导，指数的导数 $2x$ 与前面的 $1/2$ 相乘，恰好还原题目。

同类题怎样选方法

本题型共 4 个方法。

> 原函数与不定积分
> ├─ 14-1 用公式及恒等变形直接积分
> ├─ 14-2 换元或凑微分
> ├─ 14-3 分部积分
> └─ 14-4 对原函数求导或比较原函数

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

14-1 用公式及恒等变形直接积分

什么时候用　看得出基本原函数，或三角、幂式可简单化形

1. 用恒等式、拆项或幂式化简。
2. 逐项套基本积分。
3. 合并并写常数。

用到的公式或定理　$\int x^a dx=x^{a+1}/(a+1)+C$（$a\neq -1$，在适用域）；$\int dx/x=\ln|x|+C$。

易错点　当幂次为 -1 时须改用对数。

对应真题　2021 年第 11 题、2018 年第 15 题、2010 年第 17 题、2006 年第 25 题。

14-2 换元或凑微分

什么时候用 看到成套的内函数及其导数，或根式可整体代换

1. 选 $u = g(x)$。
2. 把微分和其余 x 项都替换。
3. 积分后回代，保留符号与定义区间。

用到的公式或定理 $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$，$F' = f$。

易错点 不定积分换元后必须回代。

对应真题 2022 年第 20 题、2021 年第 8 题、2020 年第 8 题、2020 年第 20 题。

14-3 分部积分

什么时候用 对数、反三角或多项式与指数三角相乘

1. 选求导后更简单的为 u。
2. 选容易积分的为 dv。
3. 写 $uv - \int v\,du$，必要时重复。

用到的公式或定理 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$。

易错点 剩余积分要写减号，重复分部时检查回到原积分。

对应真题 2019 年第 20 题、2013 年第 25 题、2012 年第 17 题、2010 年第 25 题。

14-4 对原函数求导或比较原函数

什么时候用 题目已给原函数，或比较原函数与被积函数

1. 给原函数记名。
2. 按要求求导或相减。
3. 在同一连通区间写出常数差。

用到的公式或定理 $F' = f$，$\int f\,dx = F + C$。

易错点 被积函数可能还要求一次额外求导。

对应真题 2022 年第 7 题、2019 年第 6 题、2018 年第 7 题、2015 年第 7 题。

14.2 核心概念与通俗解释

原函数与不定积分 把求导的操作倒过来，丢掉的常数要补回来。

一个原函数求导得到被积函数，不定积分表示该连通区间上的全体原函数。 用求导验证结果。

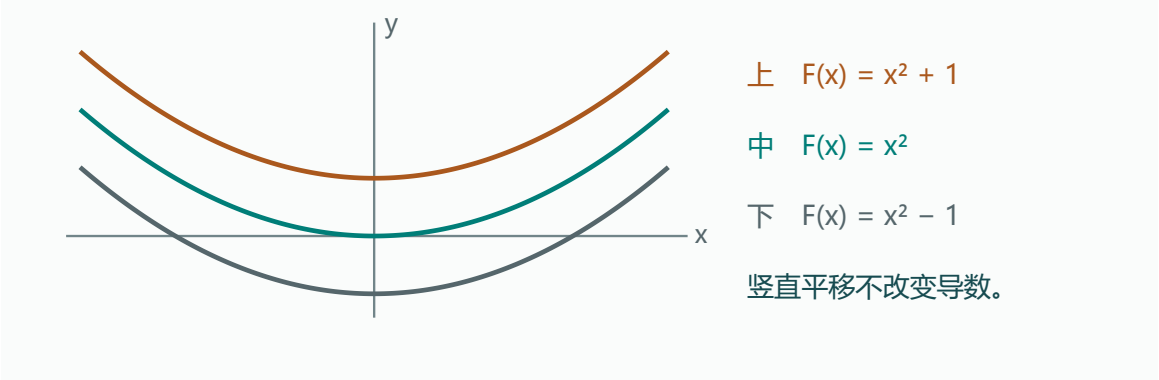

图 14-1　积分常数决定曲线的高度。三条曲线都是 2x 的原函数；在同一横坐标处，它们的切线斜率相同。

容易出错的地方：只写一个表达式却忘了 $+C$，或认为跨奇点仍同一个常数。

换元与微分配对　认出一个大括号，连同它的变化倍数一起打包。

将原变量换成新变量时，被积式与微分同步改变。 优先找内层导数。

容易出错的地方：只替换函数值，漏掉 dx 换成的因子。

分部积分　把较难的原题换成一个边界项和一个较好积分的式子。

由乘积求导反推，把积分的微分从一因子移到另一因子。 多项式降阶或对数、反三角求导时常见。

容易出错的地方：分部后更复杂却不停下来重新选 u。

14.3 真题归类总结

本章共 32 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

用公式及恒等变形直接积分（14-1）

2021 年第 11 题 • 汇编第 6 页　$\int(\sin x+\cos x)^2\,dx$

先化为 $1+\sin 2x$，逐项积分得 $x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$。　（配合 14-2）

易错点：平方有交叉项。

2018 年第 15 题 • 汇编第 24 页　$\int 1\,dx$

x 的导数为 1，所以 $\int 1\,dx=x+C$。

易错点：与 $\int x\,dx$ 区分。

2010 年第 17 题 • 汇编第 72 页　$\int dF(x)$

由 $dF=F'(x)dx$ 得 $F(x)+C$。　（配合 14-4）

易错点：不定积分保留常数。

2006 年第 25 题 • 汇编第 98 页　含平方根和立方根比值的幂积分

题面为常数 e 乘 $\sqrt[3]{x}/\sqrt{x}$，在 $x>0$ 化为 $ex^{-1/6}$，积分为 $(6e/5)x^{5/6}+C$。

易错点：把两种根式先化为分数指数。

换元或凑微分（14-2）

2022 年第 20 题 • 汇编第 3 页　$\int xe^{x^2+3}\,dx$

令 $u=x^2+3$，$du=2x\,dx$，结果 $\frac{1}{2}e^{x^2+3}+C$。

易错点：补偿系数为 $1/2$。

2021 年第 8 题 • 汇编第 6 页　已知 $\int f(x)\,dx=xe^x+C$，求 $\int f(2x)\,dx$

原函数取 $F(t)=te^t$。由 $\int f(ax)\,dx=F(ax)/a+C$，得 $xe^{2x}+C$。也可对该式求导验算。 同题出处另见 2017 年第 7 题。　（备用或配合 14-4）

易错点：内参加倍时要除以 2。

2020 年第 8 题 • 汇编第 12 页　$\int \cot x\,dx$

用 $\cot x=\cos x/\sin x$，令 $u=\sin x$，得 $\ln|\sin x|+C$。　（配合 14-1）

易错点：在不穿过零点的区间内写原函数。

2020 年第 20 题 • 汇编第 14 页　$\int \sin(2x-1)\,dx$

令 $u=2x-1$，有 $dx=du/2$，得 $-\frac{1}{2}\cos(2x-1)+C$。

易错点：正弦的原函数有负号。

2019 年第 15 题 • 汇编第 18 页　$\int e^{-x}\,dx$

令 $u=-x$ 或直接验导，得 $-e^{-x}+C$。　（配合 14-1）

易错点：容易漏外面的负号。

2018 年第 19 题 • 汇编第 25 页　$\int (2x+1)^2\,dx$

令 $u=2x+1$，得 $u^3/6+C=(2x+1)^3/6+C$。亦可先展开。　（备用或配合 14-1）

易错点：换元留下 $1/2$ 因子。

2017 年第 7 题 • 汇编第 29 页　已知原函数 xe^x，积分中换为 $f(2x)$

与 **2021 年 / 册页 6 / 第 8 题** 共用本节解析。对比两卷时按表达式核对，选项字母会变。　（配合 14-4）

易错点：对比两卷时按表达式核对，选项字母会变。

2012 年第 25 题 • 汇编第 62 页　$\int \cos^2 x\sin^3 x\,dx$

把 $\sin^3 x$ 写成 $(1-\cos^2 x)\sin x$，取 $u=\cos x$。得 $-\int(u^2-u^4)\,du=\cos^5 x/5-\cos^3 x/3+C$。（配合 14-1）

易错点：$du=-\sin x\,dx$ 有负号。

2011 年第 25 题 • 汇编第 68 页　$\int \sqrt{1-x}/x\,dx$

令 $t=\sqrt{1-x}$，则被积式化 $-2t^2/(1-t^2)\,dt$，即 $[2-2/(1-t^2)]dt$。积分回代为 $2t+\ln|(1-t)/(1+t)|+C$，$t=\sqrt{1-x}$。　(配合 14-1)

易错点：原定义域跨不过 $x=0$。

2009 年第 25 题 • 汇编第 80 页　含 $\sqrt{4-x^2}$ 的三角换元

由 $\int dx/[x^2\sqrt{4-x^2}]$，令 $x=2\sin t$（$\cos t>0$），化为 $\frac{1}{4}\int \csc^2 t\,dt$。结果 $-\sqrt{4-x^2}/(4x)+C$。(配合 14-4)

易错点：$x=0$ 是禁点，回代时保留符号。

2007 年第 24 题 • 汇编第 92 页　$\int \arcsin\sqrt{x}/\sqrt{x(1-x)}\,dx$

令 $u=\arcsin\sqrt{x}$，$du=dx/[2\sqrt{x(1-x)}]$，化为 $2\int u\,du=u^2+C$，$0<x<1$。　(配合 14-4)

易错点：别漏掉 2。

分部积分（14-3）

2019 年第 20 题 • 汇编第 20 页　$\int x\ln(x/2)\,dx$

取 $u=\ln(x/2)$、$dv=x\,dx$，得 $\frac{x^2}{2}\ln(x/2)-\int x/2\,dx=\frac{x^2}{2}\ln(x/2)-x^2/4+C$，$x>0$。

易错点：对数求导是 $1/x$。

2013 年第 25 题 • 汇编第 56 页　$\int x\cos 2x\,dx$

令 $u=x$，$dv=\cos 2x\,dx$，结果 $\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$。

易错点：两次积分的系数都为 $1/2$。

2012 年第 17 题 • 汇编第 60 页　$\int \ln x\,dx$

将 dx 作 dv，有 $x\ln x-\int x(1/x)\,dx=x\ln x-x+C$。

易错点：对数独自出现也能分部。

2010 年第 25 题 • 汇编第 74 页　$\int x^2\arctan x\,dx$

用 $u=\arctan x, dv=x^2dx$ 得 $x^3\arctan x/3-\frac{1}{3}\int x^3/(1+x^2)\,dx$。长除为 $x-x/(1+x^2)$，故结果 $x^3\arctan x/3-x^2/6+\ln(1+x^2)/6+C$。　(配合 14-1)

易错点：积分剩余有理式要先除法。

2008 年第 25 题 • 汇编第 86 页　$\int e^{2x}\sin x\cos x\,dx$

先用 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$。令 $I=\int e^{2x}\sin 2x\,dx, J=\int e^{2x}\cos 2x\,dx$，分部得 $I=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x-J$、$J=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x+I$（忽略中间常数），得原积分 $e^{2x}(\sin 2x-\cos 2x)/8+C$。　(配合 14-1)

易错点：把移回的积分项与原系数区分。

对原函数求导或比较原函数（14-4）

2022 年第 7 题 • 汇编第 1 页　由 $\int f(x)\,dx = 3/x + C$ 求 f

两边求导，$f(x) = -3/x^2$，$x \neq 0$。

易错点：常数求导为零。

2019 年第 6 题 • 汇编第 17 页　$d\left(\int F(x)\,dx\right)$

若 $G' = F$，则 $d(G + C) = F(x)\,dx$。

易错点：题目要求微分，包含 dx。

2018 年第 7 题 • 汇编第 23 页　两个原函数 F, G 的关系

在同一连通区间内 $(F - G)' = 0$，由中值定理差为常数，$F = G + C$。

易错点：不连通的各段可取不同常数。

2015 年第 7 题 • 汇编第 41 页　由 $\int f(x)\,dx = \sin x + C$ 求 f

已知原函数是正弦，求导得 $f(x) = \cos x$。

易错点：区分正弦求导和积分。

2014 年第 7 题 • 汇编第 47 页　由 $\int f(x)\,dx = e^{2x} + C$ 求 f

对右侧链式求导，得到 $f(x) = 2e^{2x}$。

易错点：不能漏因子 2。

2013 年第 7 题 • 汇编第 53 页　$\ln x$ 是 f 的原函数，求 f'

求一次得 $f = 1/x$，再求得 $f' = -1/x^2$，$x > 0$。

易错点：题问的是被积函数的导数。

2011 年第 8 题 • 汇编第 66 页　微分、求导与不定积分等式辨析

若 $G' = f$，则 $(\int f\,dx)' = f$。$\int f'\,dx = f + C$，且 $d\int f\,dx = f\,dx$。按微分与导数的记号排除缺项。

易错点：积分常数与 dx 的位置都有含义。

2010 年第 6 题 • 汇编第 71 页　由 $\int xf(x)\,dx = e^{-x^2} + C$ 求 f

先求得 $xf(x) = -2xe^{-x^2}$，在 $x \neq 0$ 有 $f(x) = -2e^{-x^2}$。若题意取连续延拓，零点值为 -2；仅凭等式本身零点值不能单独确定。

易错点：除去的 $x = 0$ 要单独讨论。

2009 年第 7 题 • 汇编第 77 页　已知 f 的原函数为 $\arctan x$，求 f'

先得 $f=1/(1+x^2)$，再得 $f'=-2x/(1+x^2)^2$。

易错点：要求两次导数。

2007 年第 7 题 • 汇编第 90 页　已知 e^{x^2} 是 f 的原函数，求 f'

$f=2xe^{x^2}$，再用乘积法则得 $f'=2(1+2x^2)e^{x^2}$。

易错点：求的是原函数的二阶导。

2006 年第 8 题 • 汇编第 96 页　由原函数 $\ln(kx)$ 选被积函数

在 $kx>0$ 的区间上，链式求导得 $k/(kx)=1/x$。

易错点：k 的符号影响定义域，但约分后导数形式不变。

2006 年第 16 题 • 汇编第 96 页　已知 $\int f(x)\,dx=\sin(2x-1)+C$

对右端求导，得 $f(x)=2\cos(2x-1)$。

易错点：别丢掉内层系数。

14.4 反套路延伸题

延伸题 1　反向走过原函数

已知 $\int f(t)\,dt=t^2e^t+C$，求 $\int f(3-2x)\,dx$。

解题线索　用 $u=3-2x$，$dx=-du/2$。

反套路点　内层不只缩放，还反向，系数为负。

解析　取 $F(t)=t^2e^t$。换元给 $-\frac{1}{2}F(u)+C$。回代后求导，$-1/2$ 与内层导数 -2 正好抵消。

答案　$-\frac{1}{2}(3-2x)^2e^{3-2x}+C$。

对应方法　14-2、14-4。

基于公开真题风格的推测　2021 年第 8 题、2017 年第 7 题均考由已知原函数推复合被积函数的原函数，这里把内层改为负斜率。

延伸题 2　对数绝对值背后的三段定义域

求 $\int (6x-3)/(x^2-x)\,dx$，说明各连通区间的积分常数。

解题线索　分子是分母导数的三倍。

反套路点　结果里的同一个绝对值式覆盖三段，常数可以分段选择。

解析　令 $u=x^2-x$，$du=(2x-1)dx$，积分是 $3\int du/u$。原分母在 $0,1$ 为零，三段分别验证导数。

答案　在三段 $(-\infty,0),(0,1),(1,\infty)$ 上均写 $3\ln|x^2-x|+C_i$，常数独立。

对应方法　14-2、14-1。

基于公开真题风格的推测　2020 年第 8 题以对数绝对值给原函数，2018 年第 7 题考查两个原函数只差常数。

题型15：定积分性质与计算

15.1 思维导图与方法总览

定积分换了变量，上下限该填什么？

2021 年第 20 题（汇编第 8 页，题意摘述）　求 $\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx$。

令 $u=3x+1$，所以 $dx=du/3$。原来 x 从 0 到 1，对应 u 从 1 到 4。

$$\frac{1}{3}\int_1^4 \sqrt{u}\,du=\frac{2}{9}(4^{3/2}-1)=\frac{14}{9}$$

积分已用 u 写完，可以直接代入新上下限。把旧上下限留在这里会算出另一个数。

同类题怎样选方法

本题型共 5 个方法。

```
定积分性质与计算
├─ 15-1 牛顿–莱布尼茨公式
├─ 15-2 换元并换上下限
├─ 15-3 分部积分
├─ 15-4 奇偶性与区间对称
└─ 15-5 分段计算或利用平面面积解释积分值
```

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

```
2016 年第 14 题原图信息
沿 x 轴：a ── A₁ ── 零点 ── A₂ ── 零点 ── A₃ ── b
相对位置：        轴上              轴下              轴上
有向贡献：         +2                −3                +4
```

读图时从左到右看阴影相对横轴的位置，上方取正，下方取负。

15-1 牛顿–莱布尼茨公式

什么时候用 能较快找出连续被积函数的原函数

1. 求原函数。
2. 分别代两个有限端点。
3. 以上限值减下限值。

用到的公式或定理 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$，要求在该段可使用原函数公式。

易错点 不要把下限代入的负值漏掉。

对应真题 2018 年第 20 题、2008 年第 26 题、2022 年第 14 题、2022 年第 15 题。

15-2 换元并换上下限

什么时候用 结构出现内函数、它的导数或根式

1. 选换元式并变换微分。
2. 将原上下限映到新变量。
3. 直接在新变量下计算，或回原变量再代原上下限。

用到的公式或定理 $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$。

易错点 若新变量从大到小，保留方向。

对应真题 2021 年第 20 题、2017 年第 20 题、2015 年第 20 题、2014 年第 19 题。

15-3 分部积分

什么时候用 含多项式乘指数三角，或对数、反三角单独出现

1. 选 u, dv。
2. 计算边界项 $[uv]_a^b$。
3. 减去新的定积分。

用到的公式或定理 $\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$。

易错点 边界项和剩余积分都按规定端点算。

对应真题 2016 年第 20 题、2011 年第 26 题、2009 年第 26 题、2007 年第 26 题。

15-4 奇偶性与区间对称

什么时候用 对称区间上出现奇偶混合

1. 逐项判断 $f(-x)$ 和 $f(x)$ 的关系。
2. 去掉奇项，偶项可半区间加倍。
3. 算余下的非零量。

用到的公式或定理 奇函数 $\int_{-a}^{a} f = 0$；偶函数 $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$。

易错点 区间不对称时只对称的那一段可用。

对应真题 2022 年第 14 题、2020 年第 15 题、2019 年第 8 题、2017 年第 15 题。

15-5 分段计算或利用平面面积解释积分值

什么时候用　含分段、绝对值、原图面积或简单圆形区域

1. 定位所有变号点和规则改变点。
2. 按积分方向分段，原图轴下取负。
3. 逐段合并。

用到的公式或定理　$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$，$\int_b^a f=-\int_a^b f$。

易错点　只有题目要几何面积时才把所有区块取正。

对应真题　2022 年第 15 题、2016 年第 14 题、2011 年第 16 题、2010 年第 18 题。

15.2 核心概念与通俗解释

牛顿–莱布尼茨公式　累计量等于总表的末读数减初读数。

连续被积函数若有原函数，可用端点的原函数值求定积分。 优先识别原函数或成套内导数。

容易出错的地方：把 $+C$ 当成定积分结果的一部分。

积分方向与可加性　顺着路走和倒着走，位移符号相反。

相邻区间可拆可合，反向积分变号。 处理分段和上下限反向。

容易出错的地方：把换元后的上下限总是按大小重排。

奇偶对称　一左一右两个贡献或相消，或相加。

相反横坐标上的偶项同值，奇项相反。 不用逐项积分就能化简。

容易出错的地方：只检查函数奇偶性，忘了区间。

有向面积与绝对值　总账可正负抵消，实际涂色面积每块都为正。

轴上贡献正、轴下贡献负，几何面积按绝对值累计。 结合零点分段或直接读取图示。

容易出错的地方：把原图所有阴影面积相加当定积分。

15.3 真题归类总结

本章共 35 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

牛顿–莱布尼茨公式（15-1）

2018 年第 20 题 • 汇编第 26 页　由 $x\ln x-x$ 的微分计算 $\int_1^e \ln x\,dx$

第（1）问 $dy=\ln x\,dx$。第（2）问用上一步求原函数，$[x\ln x-x]_1^e=1$。　（配合 15-3）

易错点：两个小问的承接是直接识别原函数。

2008 年第 26 题 • 汇编第 86 页　$\int_1^{\sqrt{3}} x/\sqrt{x^2+1}\,dx$

识别为 $\sqrt{x^2+1}$ 的导数，结果 $2-\sqrt{2}$。或令 $u=x^2+1$。　（配合 15-2）

易错点：根号覆盖整个 x^2+1。

换元并换上下限（15-2）

2021 年第 20 题 • 汇编第 8 页　$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx$

以 $u=3x+1$ 换元，上下限变为 $1,4$，得 $\frac{1}{3}[\frac{2}{3}u^{3/2}]_1^4=14/9$。　（配合 15-1）

易错点：换元时上下限同时改。

2017 年第 20 题 • 汇编第 32 页　$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$

以 $u=2x+1$ 换元，得 $\frac{1}{2}[\frac{2}{3}u^{3/2}]_1^9=26/3$。　（配合 15-1）

易错点：上限 4 换成 9。

2015 年第 20 题 • 汇编第 43 页　$\int_1^e (1+\ln x)/x\,dx$

令 $t=\ln x$，积分化为 $\int_0^1 (1+t)dt=3/2$。　（配合 15-1）

易错点：分母 x 已包含在 dt 中。

2014 年第 19 题 • 汇编第 49 页　$\int_0^1 dx/(1+\sqrt{x})$

令 $t=\sqrt{x}$，化为 $\int_0^1 2t/(1+t)\,dt=[2t-2\ln(1+t)]_0^1=2-2\ln 2$。　（配合 15-1）

易错点：$dx=2t\,dt$。

2013 年第 26 题 • 汇编第 56 页　$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

换 $u=1-x^2$，积分为 $\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du=1/3$。　（配合 15-1）

易错点：换元后上下限次序相反，与微分负号抵消。

2012 年第 26 题 • 汇编第 62 页　$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $dx=2t/(1+t^2)dt$，上下限 $0,1$，积分为 $2[t-\arctan t]_0^1=2-\pi/2$。　（配合 15-1）

易错点：同时变根式、微分和上下限。

2010 年第 26 题 • 汇编第 74 页　根式分母的定积分

原分母为 $\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}$。换 $t=\sqrt{x+1}$，从 1 到 $\sqrt{3}$，化为 $\int_1^{\sqrt{3}} 2/(1+t^2)\,dt=\pi/6$。（配合 15-1）

易错点：把第二项看成 t^3。

分部积分（15-3）

2016 年第 20 题 • 汇编第 38 页　$\int_0^1 xe^x\,dx$

取 $u=x, dv=e^x\,dx$，得 $[(x-1)e^x]_0^1=1$。同题也见于 2007 年第 26 题。　（配合 15-1）

易错点：下限代入为 -1，总式要减去。

2011 年第 26 题 • 汇编第 68 页　$\int_0^3 \arctan\sqrt{x}\,dx$

用 $t=\sqrt{x}$ 得 $\int_0^{\sqrt{3}} 2t\arctan t\,dt$。分部并化简原函数为 $(1+t^2)\arctan t - t$，得 $4\pi/3-\sqrt{3}$。　（配合 15-2）

易错点：反正切上限是 $\sqrt{3}$。

2009 年第 26 题 • 汇编第 80 页　$\int_0^{1/2} \arccos x\,dx$

分部得到原函数 $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$，上下限代入为 $\pi/6+1-\sqrt{3}/2$。　（配合 15-1）

易错点：反余弦的导数带负号。

2007 年第 26 题 • 汇编第 92 页　$\int_0^1 xe^x\,dx$

与 **2016 年 / 册页 38 / 第 20 题** 共用本节解析。误把下限值当零会得错。　（配合 15-1）

易错点：误把下限值当零会得错。

奇偶性与区间对称（15-4）

2022 年第 14 题 • 汇编第 2 页　对称区间上的有理式

$(x^3+2x^2+2)/(1+x^2)=2+x^3/(1+x^2)$，后一项奇对称积分为零，第一项积分为 4。　（配合 15-1）

易错点：奇偶性作用于拆出的两项。

2020 年第 15 题 • 汇编第 12 页　$\int_{-1}^{1}\sin x\sqrt{1-x^2}\,dx$

正弦为奇函数，根式为偶，乘积奇且区间对称，积分为零。

易错点：区间若不对称，就不能这样消去。

2019 年第 8 题 • 汇编第 18 页　$\int_{-1}^{1} 19x^{18}(1-\sin x)\,dx$

展开后 $19x^{18}\sin x$ 为奇项，剩下 $[x^{19}]_{-1}^{1}=2$。　（配合 15-1）

易错点：偶项不能随奇项一起消去。

2017 年第 15 题 • 汇编第 30 页　$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$

x^2 偶、$\sin x$ 奇，因此积分为零。

易错点：端点相反是必要识别信号。

2016 年第 8 题 • 汇编第 36 页　$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x\,dx$

被积函数为奇函数，故得零。也可用 $\sin^2 x/2$ 作原函数比较端点。　（备用或配合 15-2）

易错点：奇函数不必逐项积分。

2015 年第 14 题 • 汇编第 42 页　$\int_{-1}^{1}(2\sin(x^5)+3)\,dx$

$\sin(x^5)$ 为奇函数，故只余常数积分 $3\cdot 2=6$。　（配合 15-1）

易错点：奇性来自内外都为奇函数。

2014 年第 14 题 • 汇编第 48 页　$\int_{-1}^{1} x\cos x\,dx$

乘积为奇函数，积分为零。

易错点：不要把 $\cos x$ 当成奇函数。

2013 年第 18 题 • 汇编第 54 页　$\int_{-1}^{1}(5\sin^{2013}x-2\tan x+3)\,dx$

正弦的奇次幂及 $\tan x$ 都是奇函数且在区间内连续，得到常数项积分 6。　（配合 15-1）

易错点：奇次幂不改变正弦奇性。

2012 年第 18 题 • 汇编第 60 页　$\int_{-1}^{1}(x^2+x\tan^2 x)\,dx$

$x\tan^2 x$ 为奇项，故只求 $[x^3/3]_{-1}^{1}=2/3$。　（配合 15-1）

易错点：平方使正切因子成为偶函数。

2011 年第 18 题 • 汇编第 66 页　三项混合积分的奇偶性

$e^{x^2}\tan x$ 与 $(\arcsin x)^3$ 为奇函数，$[-1,1]$ 上积分为零，常数 3 的积分为 6。　（配合 15-1）

易错点：先逐项查对称性。

2008 年第 9 题 • 汇编第 84 页　从四个对称积分中找零值

$\arcsin x$ 奇且 e^{x^2} 偶，乘积为奇，对称区间积分为零。其他选项被积式为非负、非恒零的偶函数。

易错点：只有被积项与区间同时符合才可判零。

2007 年第 18 题 • 汇编第 90 页　$\int_{-1}^{1}[f(x)-f(-x)]dx$

被积式换 $x\mapsto -x$ 后变成其负值，故奇对称积分为零。

易错点：不需要 f 本身有奇偶性。

2006 年第 9 题 • 汇编第 96 页　四个候选定积分择零

$\arcsin x$ 奇、e^{-x^2} 偶，乘积在 $[-1,1]$ 上积分为零。其余候选非负且非恒零。

易错点：绝对值的幂为偶对称。

分段计算或利用平面面积解释积分值（15-5）

2022 年第 15 题 • 汇编第 2 页　分段函数 $\int_0^2 f(x)\,dx$

以 1 为界，计算 $\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2x+1)dx=1/3+4=13/3$。　（配合 15-1）

易错点：端点采用哪支不改变积分值。

2016 年第 14 题 • 汇编第 36 页　根据三个阴影面积求有向积分

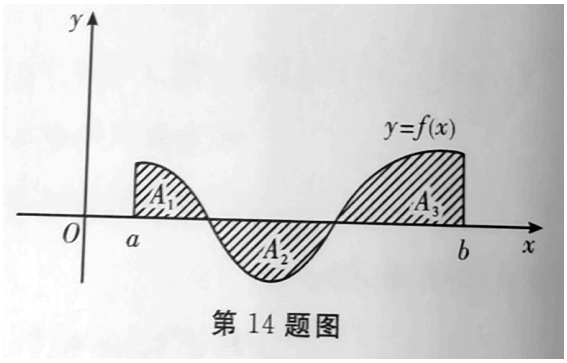

图 15-1　2016 年第 14 题试卷原图。左、右两块在横轴上方，中间一块在下方，按照从 a 到 b 的方向记作 +2、−3、+4。

原图由左到右分别在轴上、轴下、轴上，几何面积为 $2, 3, 4$。所以积分为 $2-3+4=3$。

易错点：轴下区块贡献负值。

2011 年第 16 题 • 汇编第 66 页　$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$

先化成 $\sqrt{2}|\cos x|$，于 $\pi/2$ 分段，得 $2\sqrt{2}$。　(配合 15-1)

易错点：$\sqrt{\cos^2 x}$ 带绝对值。

2010 年第 18 题 • 汇编第 72 页　$\int_{-2}^{4}|x|\,dx$

在 $x=0$ 拆为两三角形面积 2 与 8，总和 10。　(配合 15-1)

易错点：右侧比左侧更长，不能直接翻倍。

2009 年第 18 题 • 汇编第 78 页　$\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx$

在 π 分段，第二段用 $-\sin x$，两段积分分别为 2，合计 4。　(配合 15-4)

易错点：绝对值改变第二段的符号。

2008 年第 18 题 • 汇编第 84 页　$\int_0^{\pi/2}|\frac{1}{2}-\sin x|\,dx$

分界为 $\pi/6$。积分为 $\int_0^{\pi/6}(\frac{1}{2}-\sin x)dx+\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\sin x-\frac{1}{2})dx=\sqrt{3}-1-\pi/12$。　(配合 15-1)

易错点：分段时要在两边试符号。

2007 年第 15 题 • 汇编第 90 页　$4\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,dx$

根式是半径为 π 的圆的上半支；从 0 到 π 是四分之一圆，乘 4 得 π^3。备用 $x=\pi\sin t$。　(备用或配合 15-2)

易错点：区分半径 π 与圆周率系数。

2006 年第 19 题 • 汇编第 96 页　$\int_0^3 |1-x|\,dx$

在 1 拆为面积 $1/2$ 和 2，结果 $5/2$。　（配合 15-1）

易错点：分界不是积分区间的中点。

2006 年第 26 题 • 汇编第 98 页　分段计算 $\int_0^2 f(x)\,dx$

分界为 1，计算 $\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 (x^2+1)dx = 1/2+10/3 = 23/6$。　（配合 15-1）

易错点：只按分段式选被积表达式。

15.4 反套路延伸题

延伸题 1　只在一部分区间有对称性

计算 $\int_{-1}^{2}(x^3+|x|)\,dx$。

解题线索　先在 $[-1,1]$ 用对称，剩下 $[1,2]$ 直接算。

反套路点　奇函数项的积分不会在整个非对称区间抵消。

解析　在 $[-1,1]$，奇项积分为零，绝对值积分为 1。在 $[1,2]$，被积式为 x^3+x，积分为 $15/4+3/2$。合计 $25/4$。

答案　$25/4$。

对应方法　15-5、15-4。

基于公开真题风格的推测　2019 年第 8 题拆奇偶项，2022 年第 15 题按表达式换段，本题同时需要区间拆分和对称。

延伸题 2　换元后上下限反向

计算 $\int_0^1 (1-x)/[1+(1-x)^2]\,dx$。

解题线索　取 $u=1-x$，再把 $u/(1+u^2)$ 看成对数导数的一半。

反套路点　换元方向反转，负的微分与反向上下限配对。

解析　$du=-dx$，新限由 1 降到 0，因此积分等于 $\int_0^1 u/(1+u^2)du = \frac{1}{2}[\ln(1+u^2)]_0^1$。

答案　$\frac{1}{2}\ln 2$。

对应方法　15-2、15-1。

基于公开真题风格的推测　2021 年第 20 题显式换上下限，2015 年第 20 题用内导数构造定积分。

题型16：变上限积分及其求导

16.1 思维导图与方法总览

分子是一个积分，怎么认出导数定义？

2017 年第 14 题（汇编第 30 页，题意摘述）　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t\,dt}{x}$。

设 $F(x)=\int_0^x \cos t\,dt$。因为 $F(0)=0$，分子可以写成 $F(x)-F(0)$，分母正好是 $x-0$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(0)=\cos 0=1$$

还有一种核对方法：先积分得到 $\sin x$，原式就是熟悉的 $\sin x/x$ 的极限。

同类题怎样选方法

本题型共 4 个方法。

变上限积分及其求导
- 16-1 用微积分基本定理直接求导
- 16-2 上下限是函数时用链式法则并区分常数限
- 16-3 拆开含参数或分段的被积式
- 16-4 把变上限积分代入差商、极限或极值问题

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

16-1 用微积分基本定理直接求导

什么时候用　固定下限、上限恰为 x 且被积函数连续

1. 识别积分内部的哑变量。
2. 由基本定理以 x 代入被积式。
3. 若问某点再代点。

用到的公式或定理　$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$，要求 f 在所求点连续。

易错点　被积表达式不用再求一次导数。

对应真题　2019 年第 14 题、2018 年第 8 题、2013 年第 17 题、2017 年第 14 题。

16-2 上下限是函数时用链式法则并区分常数限

什么时候用 上下限含 $g(x), h(x)$ 或都是常数

1. 分别标出上下限。
2. 对上端乘 g'，对下端乘 h' 后减去。
3. 确认哪些端点是常数。

用到的公式或定理 $\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$。

易错点 下限项带负号，常数上下限积分的导数为零。

对应真题 2012 年第 7 题、2010 年第 7 题、2008 年第 8 题、2015 年第 16 题。

16-3 拆开含参数或分段的被积式

什么时候用 被积式也含外部变量或函数本身分段

1. 将外部变量能提则提出，或按分界点拆积分。
2. 逐项用乘积法则和基本定理。
3. 在拼接点检查差商。

用到的公式或定理 例如 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$。

易错点 不能只对上限求导、漏掉被积式的外部 x。

对应真题 2015 年第 16 题、2007 年第 8 题。

16-4 把变上限积分代入差商、极限或极值问题

什么时候用 变上限积分出现在差商、极限、极值或方程根数中

1. 先视为函数 $F(x)$，求 F' 或端点值。
2. 按定义、洛必达或单调判别继续。
3. 核对其条件并回到题目问的量。

用到的公式或定理 若 $F(0)=0$，则 $\lim_{x\to 0} F(x)/x = F'(0)$（可导时）。

易错点 洛必达前检查原比确为未定式。

对应真题 2017 年第 14 题、2011 年第 22 题、2010 年第 22 题、2009 年第 21 题。

16.2 核心概念与通俗解释

哑变量与活动上限 固定一把尺，滑动边界改变覆盖长度。

积分内变量是被累加的坐标，上下限决定累加范围。 先统一内外变量符号。

容易出错的地方：变量同名时将固定积分误认为变限积分。

微积分基本定理 边界多走一小步，新增量约为当前高度乘步长。

被积函数在该点连续时，积分累计量的导数等于边界处高度。 计算变限导数或解积分型最值。

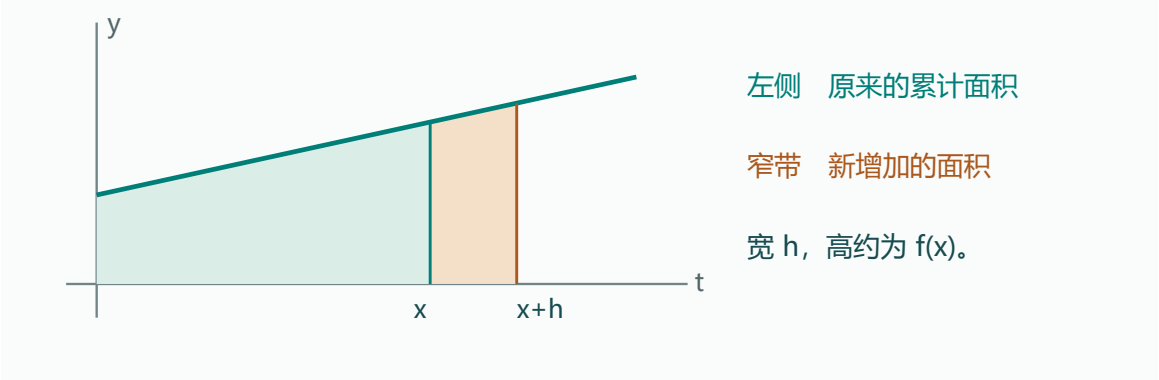

图 16-1　上限移动时，新增的是一条窄带。概念示意取正的连续函数和 h>0；右端从 x 移到 x+h，新增面积除以 h，趋近边界高度 f(x)。

容易出错的地方：在跳跃点无需检查便套公式。

链式与端点方向　右界向右多盖一点，左界向右会少盖一点。

活动端点的移动速度需相乘，下端移动会减去一部分。 两端同时移动时分别处理。

容易出错的地方：忘记下端负号或漏乘内层导数。

含参数的被积函数　除了拉动边框，画面里面的每一块也会变。

积分内部的 t 是哑变量，外部 x 可以影响全区间的高度。 通过代数拆分后分别求导。

容易出错的地方：只处理边框移动。

16.3 真题归类总结

本章共 14 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

用微积分基本定理直接求导（16-1）

2019 年第 14 题 • 汇编第 18 页　$F(x)=\int_0^x(1+t^2)^{-1}dt$ 求导

上下限中只有 x 变化，被积函数连续，故 $F'(x)=1/(1+x^2)$。

易错点：积分哑变量 t 要替换成上限。

2018 年第 8 题 • 汇编第 24 页　$f(x)=\int_0^x\cos(t^2)dt$ 求 f'

用基本定理得 $\cos(x^2)$。

易错点：$\cos(t^2)$ 与 $(\cos t)^2$ 不同。

2013 年第 17 题 • 汇编第 54 页　$f(x)=\int_0^x\cos(t^2)dt$ 在 $\sqrt{\pi}$ 的导数

先得 $f'(x)=\cos(x^2)$，再代 $\sqrt{\pi}$ 得 $\cos\pi=-1$。

易错点：别把指定的点代到积分上限后再求导。

上下限是函数时用链式法则并区分常数限（16-2）

2012 年第 7 题 • 汇编第 59 页　$\frac{d}{dx}\int_0^{2x}\sin t\,dt$

先把 $2x$ 代作被积函数输入，再乘上限导数 2，得 $2\sin 2x$。　（配合 16-1）

易错点：不能省链式系数。

2010 年第 7 题 • 汇编第 71 页　$d(\int_a^b \cos(x^2)\,dx)$，上下限均是常数

把积分变量换名为 t 可见积分量恒定，因此微分为零。

易错点：哑变量的名字不使常数积分变成函数。

2008 年第 8 题 • 汇编第 83 页　$\int_1^{2x} f(t/3)dt$ 在 $x=6$ 的导数

按链式求导得 $2f(2x/3)$，在 6 时为 $2f(4)$。

易错点：被积函数发生缩放，上限也发生缩放。

拆开含参数或分段的被积式（16-3）

2015 年第 16 题 • 汇编第 42 页　$\Phi(x)=\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$ 求导

拆成 $x\int_0^x \cos t\,dt-\int_0^x t\cos t\,dt$。求导时边界项 $x\cos x$ 相抵，余 $\int_0^x \cos t\,dt=\sin x$。　（配合 16-2）

易错点：外层 x 也需要求导。

2007 年第 8 题 • 汇编第 90 页　两段常数定义的积分函数

当 $1\le x\le 2$，$\phi(x)=\int_0^1 1\,dt+\int_1^x 2\,dt=2x-1$。

易错点：上限超过分界时，前一段积分仍要累计。

把变上限积分代入差商、极限或极值问题（16-4）

2017 年第 14 题 • 汇编第 30 页　$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t\,dt}{x}$

设积分为 $F(x)$，则 $F(0)=0$，原式是 F 在零点的差商，极限为 $F'(0)=\cos 0=1$。　（配合 16-1）

易错点：分子可以先精确积分作备用。

2011 年第 22 题 • 汇编第 67 页　用导数算 $\int_0^x (t-\sin t)dt$ 与 $e^{x^4}-1$ 的商极限

分子分母趋零，洛必达得 $(x-\sin x)/(4x^3e^{x^4})$。用 $(x-\sin x)/x^3\to 1/6$，得 $1/24$。　（配合 16-1）

易错点：指数为 x^4，导数产生 $4x^3$。

2010 年第 22 题 • 汇编第 73 页　$\lim_{x\to 0^+}\int_0^x \ln(t+e^t)dt/(1-\cos x)$

先洛必达得 $\ln(x+e^x)/\sin x$。因为 $x+e^x-1\sim 2x$，最后比值趋 2。　（配合 16-1）

易错点：先确认对数在趋近点附近有定义。

2009 年第 21 题 • 汇编第 78 页　$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x(\arctan t)^2dt/\sqrt{1+x^2}$

在 $t\geq 1$ 时被积函数至少为 $(\pi/4)^2$，分子确趋无穷。洛必达后为 $(\arctan x)^2\sqrt{1+x^2}/x$，故得 $\pi^2/4$。（配合 16-1）

易错点：验证分子发散后再用无穷比形式。

2007 年第 21 题 • 汇编第 91 页　两个变上限积分构成的比值极限

先逐项核对上下限、幂次与趋向点，再判未定式；如需洛必达，平方的积分项要先用链式法则，积分项才用基本定理。照片的指数与趋向下标待确认，数值待确认。　（配合 16-2）

易错点：不按相似经典题补写指数。

2006 年第 17 题 • 汇编第 96 页　$\lim_{x\to 0}\int_0^x \sin t\,dt/(\cos x-1)$

直接积分分子为 $1-\cos x$，在去心邻域商恒为 -1，所以极限为 -1。也可借基本定理后洛必达。（备用或配合 16-1）

易错点：分母顺序与分子相反。

16.4 反套路延伸题

延伸题 1　上下限都在走，斜率却为负

设 $F(x)=\int_{x^2}^{2x}(1+t^2)^{-1}dt$，求 $F'(1)$。

解题线索　下端贡献要减去。

反套路点　两个端点都向右，累计量的变化还取决于端点高度。

解析　$F'(x)=2/(1+4x^2)-2x/(1+x^4)$，在 $x=1$ 分别为 $2/5$ 与 1，相减。

答案　$F'(1)=-3/5$。

对应方法　16-2、16-1。

基于公开真题风格的推测　2012 年第 7 题上限为 $2x$，2008 年第 8 题把上限缩放与给定点值结合。

延伸题 2　被积函数有跳跃，积分组合仍可导

设 $f(t)=1\ (t<0)$ 和 $f(t)=3\ (t\geq 0)$，$F(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$。求 $F'(0)$。

解题线索　分别算正负 x 的积分，再取零点差商。

反套路点　被积函数在端点遇到跳跃，直接代 $f(0)$ 两次会错误得到 6。

解析　$x>0$ 时左右两块分别为 x 和 $3x$。$x<0$ 时先把上下限对调，得到 $-[(-x)+3(-x)]=4x$。所以附近恒为 $4x$，可直接求导。

答案　$F'(0)=4$。

对应方法　16-3、16-2。

基于公开真题风格的推测　2007 年第 8 题要求对两段常数累加，2017 年第 14 题把积分式放进差商求极限。

题型17：广义积分的计算与敛散判定

17.1 思维导图与方法总览

被积函数在端点趋于无穷，积分会有有限值吗？

2016 年第 15 题（汇编第 36 页，题意摘述）　计算 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$。

零点处不能直接代入被积函数。先从正数 ε 积到 1，算完再让左端靠近零。

$$\int_{\varepsilon}^{1} x^{-1/2}\,dx = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \longrightarrow 2$$

极限有限，广义积分收敛，值为 2。判断收敛看的是积分值的极限。

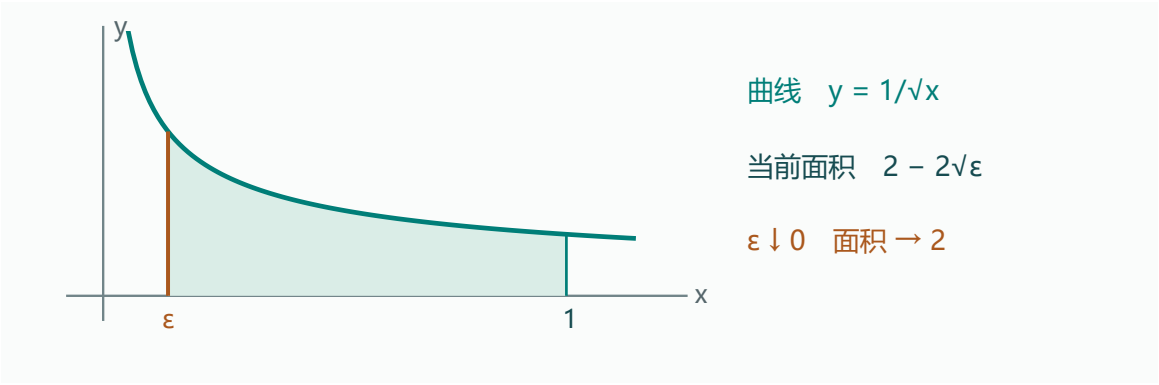

图 17-1　先从正数 ε 开始积分。图中暂时舍去 0 到 ε 的部分，把左边界向零推近；阴影面积趋于 2。

同类题怎样选方法

本题型共 2 个方法。

> 广义积分的计算与敛散判定
> ├─ 17-1 把无穷区间或瑕点改写成单侧极限
> └─ 17-2 用基本模型与比较判断敛散

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

17-1 把无穷区间或瑕点改写成单侧极限

什么时候用 积分上下限为无穷，或被积式在端点、内部无界

1. 找出所有无穷端和瑕点，并在有限普通点分段。
2. 每一段以有限端点做普通积分。
3. 各自取单侧极限，全部有限才合并。

用到的公式或定理 $\int_a^{\infty} f = \lim_{R\to\infty}\int_a^{R} f$。端点瑕点则从可积一侧逼近。

易错点 不能拿对称截断掩盖不同侧的发散。

对应真题 2016 年第 15 题、2015 年第 15 题、2014 年第 15 题、2012 年第 8 题。

17-2 用基本模型与比较判断敛散

什么时候用 被积函数像幂函数，或显式原函数不便寻找

1. 区分近零模型和无穷远模型。
2. 用上下界或等价尺度比较非负函数。
3. 对临界指数单独分析。

用到的公式或定理 $\int_1^{\infty} x^{-p}dx$ 收敛当 $p>1$；$\int_0^{1} x^{-p}dx$ 收敛当 $p<1$。

易错点 近零和无穷远的门槛方向相反。

对应真题 2013 年第 8 题、2016 年第 15 题、2010 年第 8 题。

17.2 核心概念与通俗解释

广义积分与瑕点 把危险边界留一小段空隙，算完后逐渐缩小空隙。

区间无界或被积函数无界时，以普通积分的单侧极限定义。 例如端点的 $x^{-1/2}$ 虽无界仍可积。

容易出错的地方：被积函数无界就必发散。

收敛、发散与分段 每边的账要独立结算，两笔无穷不能互相冲抵。

每个独立的异常端都要给有限极限，才有通常意义的积分。 遇双无穷或内部瑕点先拆。

容易出错的地方：把柯西主值当作广义积分。

幂积分比较 看曲线尾部或尖角有多重。

比较要在同一异常端附近进行；对非负函数可借已知敛散的模型。 先确定考查的是哪一端。

容易出错的地方：将无穷远的 $p>1$ 套到近零。

17.3 真题归类总结

本章共 8 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

把无穷区间或瑕点改写成单侧极限（17-1）

2016 年第 15 题 • 汇编第 36 页　$\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$

左端是瑕点。取 $\varepsilon>0$，积分为 $[2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^{1}$，令 $\varepsilon\downarrow 0$ 得 2。　（配合 17-2）

易错点：被积函数趋无穷不等于积分发散。

2015 年第 15 题 • 汇编第 42 页　$\int_{-\infty}^{1} e^{x}\,dx$

令下限 $a\to-\infty$，$[e^x]_a^1=e-e^a\to e$。

易错点：这里无穷端在下限。

2014 年第 15 题 • 汇编第 48 页　$\int_0^{+\infty} dx/(1+x^2)$

原函数 $\arctan x$，取有限上限 R 后令 $R\to+\infty$，得 $\pi/2$。 同题出处另见 2012 年第 8 题、2007 年第 19 题。

易错点：无穷远取极限而非直接代入原函数的变量。

2012 年第 8 题 • 汇编第 59 页　$\int_0^{\infty} dx/(1+x^2)$

与 **2014 年 / 册页 48 / 第 15 题** 共用本节解析。核对题列所问是值还是敛散。

易错点：核对题列所问是值还是敛散。

2011 年第 17 题 • 汇编第 66 页　$\int_{-\infty}^{+\infty} dx/(x^2+4x+5)$

配方 $(x+2)^2+1$。于有限点分成两段，分别由 $\arctan(x+2)$ 得极限，合计 $\pi/2-(-\pi/2)=\pi$。

易错点：两端各自收敛才能相加。

2010 年第 8 题 • 汇编第 71 页　$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x}/(1+e^{2x})\,dx$

令 $u=e^x$，分别处理两端后化成 $\int_0^{\infty} du/(1+u^2)=\pi/2$。　（配合 17-2）

易错点：$x\to-\infty$ 对应 $u\to0^+$。

2007 年第 19 题 • 汇编第 90 页　$\int_0^{+\infty} dx/(1+x^2)$

与 **2014 年 / 册页 48 / 第 15 题** 共用本节解析。反正切在正无穷取 $\pi/2$。

易错点：反正切在正无穷取 $\pi/2$。

用基本模型与比较判断敛散（17-2）

2013 年第 8 题 • 汇编第 53 页　求 $\int_2^{\infty} x^{-k}dx$ 发散的 k

$k=1$ 时原函数为 $\ln x$，发散。$k\neq1$ 时 $[x^{1-k}/(1-k)]_2^R$ 有限当且仅当 $1-k<0$，故发散集合为 $k\le1$。　（配合 17-1）

易错点：临界 $k=1$ 要单列。

17.4 反套路延伸题

延伸题 1　两端都不普通但都可积

求 $\int_0^{\infty} dx/[\sqrt{x}(1+x)]$，并说明为何可收敛。

解题线索　分别近似 $x^{-1/2}$ 与 $x^{-3/2}$，然后换元 $x=t^2$。

反套路点　零点瑕点和无穷远端同时存在。

解析　近零可用 $x^{-1/2}$ 上界，远处用 $x^{-3/2}$ 上界，各段收敛。令 $x=t^2$ 后，两段合并得 $2\int_0^{\infty} dt/(1+t^2)$。

答案　π。

对应方法　17-1、17-2。

基于公开真题风格的推测　2016 年第 15 题考端点瑕积分，2012 年第 8 题和 2013 年第 8 题考无穷区间的值或敛散。

延伸题 2　对称消去只得到主值

判断 $\int_{-1}^{1} dx/x$ 是否收敛。说明为何对称截断能得到零。

解题线索　在 0 左右独立取极限。

反套路点　被积函数虽奇，区间内部有瑕点，普通奇偶规则不能直接套。

解析　左段积分为 $\ln\varepsilon \to -\infty$，右段为 $-\ln\delta \to +\infty$。令 $\varepsilon=\delta$ 时有限截断和是零，但两段的独立极限不有限。

答案　广义积分发散；对称截断的主值为 0。

对应方法　17-1。

基于公开真题风格的推测　2011 年第 17 题要检查两个异常端，2020 年第 15 题用奇偶性的前提是积分存在。

题型18：空间点坐标与向量运算

18.1 思维导图与方法总览

怎样从两点坐标得到空间距离?

2021 年第 10 题（汇编第 6 页，题意摘述）　求 $A(2,1,0)$、$B(1,-1,2)$ 之间的距离。

从 A 到 B，三个方向的坐标变化依次为 $-1,-2,2$。在空间中，把三个变化量平方相加后开平方。

$$AB=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=3$$

调换两点时三个差都变号，距离仍然相同，可以用来核对计算。

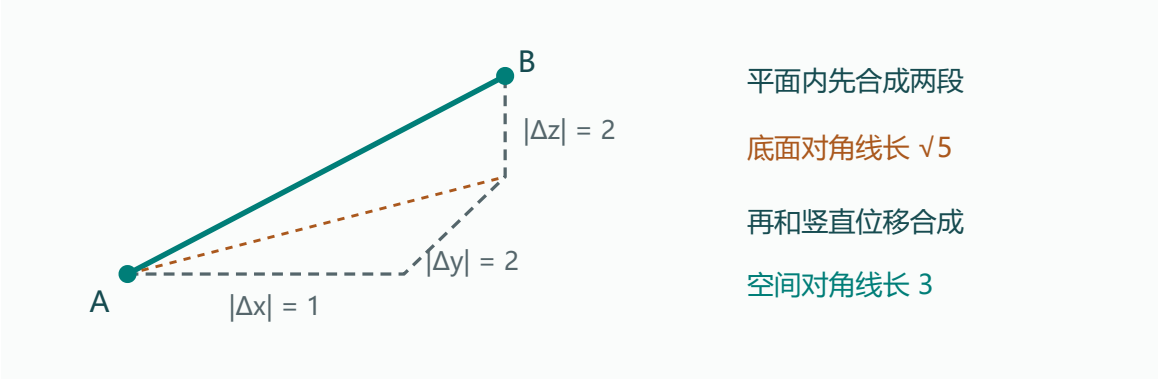

图 18-1　把空间距离分成两次勾股计算。虚线按三个互相垂直的坐标方向走，实线直接从 A 到 B；这是空间投影示意。

同类题怎样选方法

本题型共 5 个方法。

空间点坐标与向量运算
- 18-1 坐标对称
- 18-2 用坐标差求距离或方向
- 18-3 点积判垂直或求夹角
- 18-4 叉积求面积或垂直方向
- 18-5 比例判平行

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

18-1 坐标对称

什么时候用 点关于某坐标轴、坐标面或原点对称

1. 明确固定的坐标子空间。
2. 保留该空间内的分量。
3. 将其余垂直分量反号。

用到的公式或定理 关于 xy 面保留 x, y，关于 x 轴只保留 x。

易错点 轴对称与面对称反号的坐标数量不同。

对应真题 2022 年第 9 题、2018 年第 9 题、2015 年第 8 题、2013 年第 9 题。

18-2 用坐标差求距离或方向

什么时候用 给两个点坐标，求方向或距离

1. 终点减起点。
2. 方向取所得非零向量。
3. 距离为其模。

用到的公式或定理 $\overrightarrow{AB} = B - A,\ d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$。

易错点 坐标逐项相减并平方再加。

对应真题 2021 年第 10 题、2019 年第 9 题。

18-3 点积判垂直或求夹角

什么时候用 问垂直、角度或含线性组合的模

1. 写点积或模平方。
2. 代分量和夹角数据。
3. 解参数或最后取平方根。

用到的公式或定理 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$。

易错点 点积给标量；直角需两个向量非零。

对应真题 2017 年第 16 题、2014 年第 8 题、2012 年第 10 题、2009 年第 19 题。

18-4 叉积求面积或垂直方向

什么时候用 要叉积大小、平行判定或与两个向量垂直的方向

1. 用分配律或行列式求叉积。
2. 用反交换性消去同向项。
3. 求模或读方向。

用到的公式或定理 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$。

易错点 交换因子后方向反转。

对应真题 2016 年第 9 题、2011 年第 20 题、2007 年第 16 题、2010 年第 20 题。

18-5 比例判平行

什么时候用 向量分量成比例，问平行参数

1. 用已知非零分量定比例。
2. 令所有分量服从同一比例。
3. 检查零分量及非零方向。

用到的公式或定理 非零向量平行等价于 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$，$\lambda\neq 0$。

易错点 有零分量时不要直接写除零比值。

对应真题 2010 年第 20 题、2016 年第 9 题。

18.2 核心概念与通俗解释

向量的模与距离 每个方向的位移共同决定直线长度。

向量模是长度，两点距离是坐标差向量的模。 用空间勾股公式算距离。

容易出错的地方：把三坐标差直接相加。

点积与夹角 把一个向量沿另一个方向投影，再乘另一向量长度。

点积是有符号的标量，连接长度、余弦和投影；两个非零向量垂直时为零。 反求垂直参数及向量组合的模。

容易出错的地方：把点积为零当成平行。

叉积与平行 两方向撑出的薄片，面积大小和法向方向都被记录。

叉积方向垂直于两因子，模等于平行四边形面积，两个非零向量平行时为零。 用于空间方向与运算展开。

容易出错的地方：叉积交换不变。

坐标对称和共线 沿镜面保留位置，反向镜面法向的分量。

相对坐标子空间决定哪些分量对称，向量共线要求同一比例。 逐坐标核验。

容易出错的地方：对坐标原点、坐标轴和坐标面使用同一种反号规则。

18.3 真题归类总结

本章共 17 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

坐标对称（18-1）

2022 年第 9 题 • 汇编第 2 页 点 $(2,-3,6)$ 关于原点的对称点

三坐标都反号，得 $(-2,3,-6)$。

易错点：与关于某个坐标面的对称区分。

2018 年第 9 题 • 汇编第 24 页　$(1,0,-1)$ 与 $(1,0,1)$ 的对称关系

只有 z 分量反号，故关于 xy 坐标面对称。

易错点：两点都在 $y=0$ 内不表示关于 y 轴对称。

2015 年第 8 题 • 汇编第 42 页　$(1,2,3)$ 关于 x 轴的点

保留 x，反转 y,z，得 $(1,-2,-3)$。

易错点：轴对称保留沿轴的分量。

2013 年第 9 题 • 汇编第 53 页　$(1,1,-1)$ 关于原点的对称点

全坐标变号后得到 $(-1,-1,1)$。

易错点：负坐标取反变正。

2011 年第 9 题 • 汇编第 66 页　$(-1,2,-3)$ 与 $(1,2,-3)$ 的对称关系

仅 x 变号，故关于 yz 坐标面对称。

易错点：另两个坐标保持原值。

2009 年第 9 题 • 汇编第 77 页　$(1,2,3)$ 与 $(1,-2,3)$ 的对称面

仅 y 变号，故关于 xOz 面对称。

易错点：用被翻转的坐标辨认坐标面。

用坐标差求距离或方向（18-2）

2021 年第 10 题 • 汇编第 6 页　$A(2,1,0), B(1,-1,2)$ 的距离

坐标差为 $(-1,-2,2)$，模为 $\sqrt{1+4+4}=3$。

易错点：平方后各项非负。

2019 年第 9 题 • 汇编第 18 页　$A(1,1,0), B(0,-1,2)$ 的距离

坐标差 $(-1,-2,2)$，同样得 3。两题数据不同，各自保留。

易错点：距离是差向量的模。

点积判垂直或求夹角（18-3）

2017 年第 16 题 • 汇编第 30 页　$(1,k,1)$ 与 $(1,0,k)$ 垂直

由点积 $1+k=0$ 得 $k=-1$。

易错点：用点积而非叉积。

2014 年第 8 题 • 汇编第 48 页　判断与 $(1,-2,1)$ 垂直的候选向量

与 $(1,1,1)$ 的点积为 $1-2+1=0$，故选该向量。

易错点：按对应分量相乘。

2012 年第 10 题 • 汇编第 60 页　已知模和夹角，求 $|2\mathbf{a}-3\mathbf{b}|$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2\cdot3\cos(\pi/3)=3$，模平方 $4\cdot4+9\cdot9-12\cdot3=61$，故为 $\sqrt{61}$。

易错点：最后开平方。

2009 年第 19 题 • 汇编第 78 页　求 $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})$

由模 $2,1$ 和夹角 $\pi/3$ 得 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1$。展开为 $2|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=6$。

易错点：点积中交叉项系数合并为 -1。

2008 年第 19 题 • 汇编第 84 页　$(1,2,-1)$ 与 $(2,1,k)$ 垂直

点积 $2+2-k=0$，解得 $k=4$。

易错点：第三项为 $-k$。

叉积求面积或垂直方向（18-4）

2016 年第 9 题 • 汇编第 36 页　两个非零向量平行的充要条件

由 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$，平行当且仅当叉积为零。　（配合 18-5）

易错点：反向共线仍是平行。

2011 年第 20 题 • 汇编第 66 页　求 $|(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+2\mathbf{b})|$

展开得 $3(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$。题给模 $1,2$，夹角 $\pi/6$，故所求为 $3\cdot1\cdot2\sin(\pi/6)=3$。

易错点：叉积交换因子变号。

2007 年第 16 题 • 汇编第 90 页　已知 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=3$ 的叉积组合

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})=-2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$，取模得 6。

易错点：取模后系数的负号消失。

比例判平行（18-5）

2010 年第 20 题 • 汇编第 72 页　$(1,3,-2)$ 与 $(2,6,\lambda)$ 平行

前两分量给比例 2，第三分量应为 -4，所以 $\lambda=-4$。　（配合 18-4）

易错点：比例须对同一向量乘同一个数。

18.4 反套路延伸题

延伸题 1　同一参数分别制造直角和平行

给 $\mathbf{a}=(0,2,-1),\mathbf{b}=(0,k,4)$，分别求它们垂直及平行时的 k。

解题线索　垂直用点积，平行用同一倍数关系。

反套路点　第一个分量为零，三项比例直接写会除零。

解析　垂直需 $2k-4=0$，得 $k=2$。平行写 $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$，第三分量给 $\lambda=-4$，第二分量给 $k=-8$。

答案　垂直 $k=2$，平行 $k=-8$。

对应方法　18-3、18-5。

基于公开真题风格的推测　2017 年第 16 题用点积反求参数，2010 年第 20 题用比例判平行。

延伸题 2　大叉积化为一个基本面积

若 $|\mathbf{a}|=2,|\mathbf{b}|=4$，夹角为 $\pi/6$，求 $|(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+3\mathbf{b})|$。

解题线索　用 $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$。

反套路点　四项展开后两项消失，剩下两项的符号恰好相加。

解析　展开得到 $6\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}=7\mathbf{a}\times\mathbf{b}$。基础叉积的模为 $2\cdot4\sin(\pi/6)=4$。

答案　28。

对应方法　18-4。

基于公开真题风格的推测　2011 年第 20 题根据夹角求叉积组合的模，2007 年第 16 题用反交换性简化组合。

题型19：空间直线、平面及位置关系

19.1 思维导图与方法总览

平面方程整体乘一个数，会改变距离吗?

2020 年第 9 题（汇编第 12 页，题意摘述）　求点 $M(1,-1,2)$ 到平面 $-2x+y-2z+1=0$ 的距离。

把点代入平面方程左端得 -6。取绝对值后，还要除以法向量 $(-2,1,-2)$ 的长度，才能换成实际距离。

$$d=\frac{|-2-1-4+1|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{6}{3}=2$$

若把平面方程两边同时乘 2，分子、分母都会加倍，距离仍是 2。

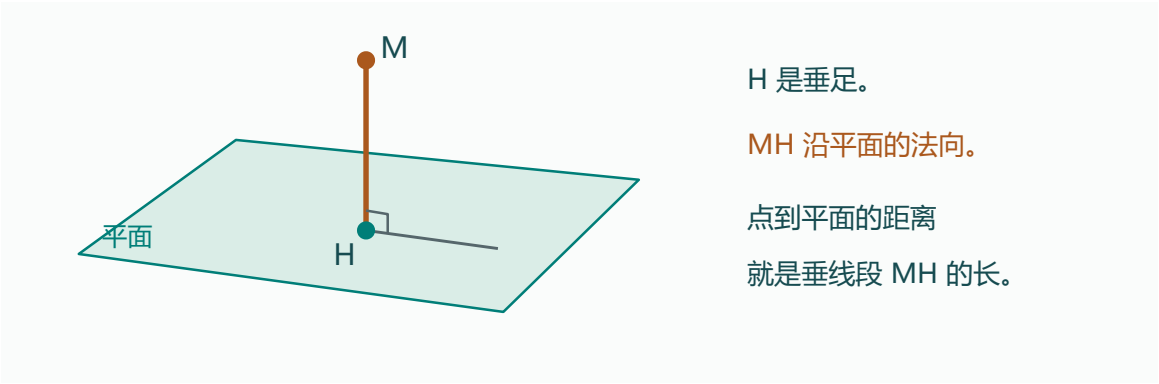

图 19-1　先找点到平面的垂线。示意图中，从题给点 M 沿法向落到平面，垂线段 MH 对应公式算出的距离 2。

同类题怎样选方法

本题型共 5 个方法。

空间直线、平面及位置关系
├─ 19-1 用点和方向向量建直线
├─ 19-2 用点和法向量建平面
├─ 19-3 联立方程求交点或判位置
├─ 19-4 套点面距离公式
└─ 19-5 用法向投影处理投影

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

> 空间方向关系
> ├ 线 ∥ 线 → 两方向向量共线
> ├ 线 ⊥ 面 → 线方向与面法向共线
> ├ 线方向沿面 → 线方向与面法向点积为零，再查过点
> └ 面 ⊥ 面 → 两法向量点积为零

读图时先识别题设的几何对象，再将关系换成方向向量或法向量的运算。

19-1 用点和方向向量建直线

什么时候用 问过某点的直线，或给出两个平面的交线作参照

1. 找过点。
2. 从两点差、旧直线参数、平面法向或两个法向叉积取方向。
3. 写点参数式并回验条件。

用到的公式或定理 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{d},\ \mathbf{d}\neq\mathbf{0}$。

易错点 对称式中零方向分量要改写成固定坐标。

对应真题 2022 年第 21 题、2021 年第 19 题、2020 年第 21 题、2019 年第 21 题。

19-2 用点和法向量建平面

什么时候用 问过点且平行或垂直的平面

1. 找或构造法向量。
2. 代给定点写点法式。
3. 检查与目标平面或直线的方向关系。

用到的公式或定理 $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$。

易错点 法向量与面内向量垂直；平行面还需区分重合。

对应真题 2018 年第 16 题、2018 年第 21 题、2017 年第 8 题、2016 年第 18 题。

19-3 联立方程求交点或判位置

什么时候用 题问线面相交或位置、线线垂直

1. 提取方向和法向。
2. 用点积初判并把参数方程代入。
3. 求交点或区分面内、平行、垂直。

用到的公式或定理 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{d}\neq 0$ 时唯一线面交点；等于零时查过点。

易错点 $\mathbf{d}$ 与 $\mathbf{n}$ 共线对应线面垂直。

对应真题 2017 年第 21 题、2016 年第 16 题、2015 年第 21 题、2010 年第 9 题。

19-4 套点面距离公式

什么时候用 给点和标准平面方程求距离

1. 把点代进平面左式。
2. 取绝对值。
3. 除以法向量的模。

用到的公式或定理 $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。

易错点 分子绝对值与法向整体缩放要同时处理。

对应真题 2020 年第 9 题、2013 年第 19 题。

19-5 用法向投影处理投影

什么时候用 问直线或点在平面上的正投影

1. 求原线一个点及方向。
2. 分别去掉法向分量。
3. 用投影点和投影方向写像，零方向时退化为点。

用到的公式或定理 $\mathbf{d}_{\parallel}=\mathbf{d}-\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$。

易错点 有常数项的平面上，投影点距平面用完整方程。

对应真题 2012 年第 27 题。

19.2 核心概念与通俗解释

方向向量与法向量 一个像轨道方向，一个像钉在桌面上的竖杆。

直线沿方向向量延伸，平面法向量垂直于其所有方向。 先找每个对象承担的向量角色。

容易出错的地方：把面内向量当作法向。

直线和平面的位置 沿平面方向移动时，只有起点在平面上才能一直留在面内。

线向量与面法向点积判是否平行方向，再由一个线点判是否全线在面内。 交点题用代入参数计算。

容易出错的地方：只凭点积为零就写线面平行且不重合。

点面距离与投影 把点顺着垂直方向落到桌面。

距离沿法线量，正投影沿法线落在平面。 投影线还需方向，方向为零时只得到点。

容易出错的地方：仅投影一个点就确定整条影子。

19.3 真题归类总结

本章共 26 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

用点和方向向量建直线（19-1）

2022 年第 21 题 • 汇编第 3 页　过 $A(1,1,-1)$ 求平行线及垂直平面

给定直线方向 $\mathbf{d}=(1,2,1)$。平行直线为 $(1,1,-1)+t(1,2,1)$；垂直平面以 $\mathbf{d}$ 为法向量，得 $x+2y+z-2=0$。　(配合 19-2)

易错点：同一向量在两个小问中扮演不同角色。

2021 年第 19 题 • 汇编第 8 页　过 A,B 的直线及过 A 的垂直平面

$A(2,1,1),B(3,3,4)$，$\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$。直线为 $A+t(1,2,3)$，平面 $x+2y+3z-7=0$。　(配合 19-2)

易错点：平面用同一方向作法向量。

2020 年第 21 题 • 汇编第 15 页　给定参数直线与点，求平行线及垂直平面

从参数系数取 $\mathbf{d}=(4,-1,2)$，过 $M(3,-1,1)$ 的直线为 $M+t\mathbf{d}$，垂直平面为 $4x-y+2z-15=0$。　(配合 19-2)

易错点：常数项提供过点，参数系数才给方向。

2019 年第 21 题 • 汇编第 20 页　由两点求直线与垂直平面

从 $A(1,-1,0),B(2,1,1)$ 得 $\mathbf{d}=(1,2,1)$。直线 $A+t\mathbf{d}$，过 A 的垂直平面 $x+2y+z+1=0$。(配合 19-2)

易错点：检查平面常数由哪个过点决定。

2012 年第 20 题 • 汇编第 60 页　过 $(-1,2,1)$ 且平行于两平面的交线

取 $(2,1,0)\times(0,1,2)=(2,-4,2)$，方向可约为 $(1,-2,1)$，所求为 $(-1,2,1)+t(1,-2,1)$。

易错点：叉积用于给交线定方向。

2009 年第 27 题 • 汇编第 80 页　过 $(2,-1,1)$ 且平行于两平面的直线

法向量 $(2,-1,3)$、$(1,-3,1)$ 的叉积 $(8,1,-5)$ 给方向，所求对称式 $(x-2)/8=(y+1)/1=(z-1)/(-5)$。　(配合 19-2)

易错点：用两个法向量叉积，不能直接用其一作方向。

2007 年第 27 题 • 汇编第 93 页　过 $M(1,2,-1)$ 的平行直线

由原参数式取方向 $(-1,3,1)$，所求为 $(1,2,-1)+t(-1,3,1)$。

易错点：平行线的锚点要换为指定点。

2006 年第 18 题 • 汇编第 96 页　过 $(1,0,1)$ 且垂直于 $x-y+2z+1=0$

用平面法向量 $(1,-1,2)$ 作直线方向，得 $(1,0,1)+t(1,-1,2)$。

易错点：垂线方向是法向量。

用点和法向量建平面（19-2）

2018 年第 16 题 • 汇编第 24 页　$(k,1,0)$ 垂直于 xz 坐标面

xz 面的法向量为 $(0,1,0)$，给定向量与之共线须 $k=0$。

易错点：垂直于面意味着平行于法向量。

2018 年第 21 题 • 汇编第 26 页　先算向量再写平面方程

$\mathbf{n}=2(3,0,-1)-(2,-1,1)=(4,1,-3)$；在点 $(1,-2,-1)$ 写点法式得 $4x+y-3z-5=0$。

易错点：未坐标的法向量系数为负。

2017 年第 8 题 • 汇编第 30 页　辨认 $x=0$ 的空间几何图形

所有 x 坐标为零的点 $(0,y,z)$ 构成 yOz 平面。

易错点：两个坐标可独立变化，所以不是轴。

2016 年第 18 题 • 汇编第 37 页　过 $(1,-1,2)$ 且垂直于直线的平面

直线方向 $(1,2,-1)$ 为所求平面法向量，点法式化简为 $x+2y-z+3=0$。

易错点：取方向向量作法向量。

2014 年第 21 题 • 汇编第 50 页　过 C 且垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 的平面

$A(-1,1,2),B(1,-1,1)$ 给 $\overrightarrow{AB}=(2,-2,-1)$，以此为法向量并代 $C(2,0,2)$，得 $2x-2y-z-2=0$。

易错点：方程经过 C 而非默认经过 A。

2013 年第 27 题 • 汇编第 56 页　同时垂直于两个已知平面的平面

两法向量 $(5,-2,6)$、$(3,-1,2)$ 叉积为 $(2,8,1)$，这也是所求平面的法向量。代过点 $(3,-2,2)$ 得 $2x+8y+z+8=0$。

易错点：平面互相垂直时法向量也互相垂直。

2011 年第 28 题 • 汇编第 69 页　过 $(1,-2,3)$ 且平行于两条直线的平面

两方向 $(2,-1,3)$ 和 $(3,2,-1)$ 的叉积为 $(-5,11,7)$，代点得 $-5x+11y+7z+6=0$。

易错点：得到平面后可再用代入检查平行关系。

2008 年第 28 题 • 汇编第 87 页　过 $(2,-3,4)$ 且垂直于两平面的交线

交线方向 $(3,0,1)\times(0,1,2)=(-1,-6,3)$，作为新平面法向量，得 $-x-6y+3z-28=0$。

易错点：先找交线的方向。

2006 年第 28 题 • 汇编第 99 页　过 $(-1,0,3)$ 且平行于 $3x+2y-z+1=0$

用相同法向量 $(3,2,-1)$，由指定点算常数项，得 $3x+2y-z+6=0$。

易错点：平行面一般常数项不同。

联立方程求交点或判位置（19-3）

2017 年第 21 题 • 汇编第 32 页　求参数直线与平面的交点

令直线上点为 $(1+2t,2+3t,-1+t)$，代入 $x+2y-4z+7=0$ 得 $16+4t=0$，点为 $(-7,-10,-5)$。

易错点：把求得的参数代回三个坐标。

2016 年第 16 题 • 汇编第 36 页　两空间直线垂直反求 k

两方向 $(2k,k+2,-5)$、$(3,1,k)$ 的点积为 $2k+2$，故 $k=-1$。

易错点：用方向向量的点积。

2015 年第 21 题 • 汇编第 44 页　过线面交点且与给定线垂直的平面

直线 $(2+t,3+2t,t)$ 代入 $2x+y+z-2=0$，得 $t=-1$、交点 $(1,1,-1)$。以原方向 $(1,2,1)$ 为法向量，所求为 $x+2y+z-2=0$。　(配合 19-2)

易错点：交点与所求法向量来自不同步骤。

2010 年第 9 题 • 汇编第 71 页　$L:(x-2)/1=(y+1)/(-1)=(z-1)/3$ 与所给平面的位置

$\mathbf{d}=(1,-1,3)$，$\mathbf{n}=(1,-5,6)$。点积为 $24\neq 0$，故相交；两向量不共线，故相交但不垂直。

易错点：相交和垂直分别判断。

2010 年第 28 题 • 汇编第 75 页　过 $P=(-1,0,4)$、平行于面且与给定直线相交

设交点 $Q=(-1+t,3-t,2t)$。$\overrightarrow{PQ}\cdot(3,-4,1)=9t-16=0$，得方向 $(16,11,-4)$，所求为 $P+s(16,11,-4)$。　(配合 19-1)

易错点：题设的交点尚未知，要先参数化。

2007 年第 9 题 • 汇编第 90 页　$x=y=(z-1)/3$ 与 $x+2y-z+1=0$ 的位置

取直线上点 $(t,t,1+3t)$ 代入，恒为零。故全线在面内。

易错点：点积为零时还要查直线上一点。

套点面距离公式（19-4）

2020 年第 9 题 • 汇编第 12 页　点 $M(1,-1,2)$ 到 $-2x+y-2z+1=0$

代入得分子 $|-2-1-4+1|=6$，法向量模 3，距离 2。

易错点：分子要取绝对值。

2013 年第 19 题 • 汇编第 54 页　$(1,-1,0)$ 到 $2x+2y-z-6=0$

代入绝对值 6，法向量模 3，距离 2。

易错点：分母包含三个法向分量。

用法向投影处理投影（19-5）

2012 年第 27 题 • 汇编第 62 页　直线在 $x+y+z=0$ 上的正投影

联立原两平面得直线过 $P=(0,1,0)$、方向 $\mathbf{d}=(0,1,1)$。取 $\mathbf{n}=(1,1,1)$，投影点为 $(-1,2,-1)/3$，投影方向与 $(-2,1,1)$ 平行。代入点方向式即得投影直线。　（配合 19-1）

易错点：点和方向都要投影。

19.4 反套路延伸题

延伸题 1　方向平行时整条直线可能在面内

设 $L=(1,0,0)+t(1,2,k)$，Π 为 $2x-y+z-2=0$。按 k 判断位置。

解题线索　将参数式代入，常数项恰为零。

反套路点　点积为零的临界值出现整条直线在面内。

解析　代入左式得 kt，若 $k=0$ 恒等于零。若 $k\neq 0$ 只有 $t=0$，交点为 $(1,0,0)$。方向 $(1,2,k)$ 与法向 $(2,-1,1)$ 的前两分量比例不一致，因此相交时不垂直。

答案　$k=0$ 时 $L\subset\Pi$；$k\neq 0$ 时斜交于 $(1,0,0)$。

对应方法　19-3、19-2。

基于公开真题风格的推测　2010 年第 9 题区分线面位置，2007 年第 9 题通过代入识别整线在面内。

延伸题 2　直线的投影可能只有一个点

求 $L=(1,2,3)+t(1,1,1)$ 在 $\Pi: x+y+z=0$ 上的正投影。

解题线索　直线方向正好是平面法向。

反套路点　题目给的是直线，投影却可能退化。

解析　在 $(1,2,3)$ 上减去 $\frac{6}{3}(1,1,1)$，落到 $(-1,0,1)$。$t(1,1,1)$ 完全处于法向分量中，所以任意原点都落在同一处。

答案　投影为点 $(-1,0,1)$。

对应方法　19-5、19-3。

基于公开真题风格的推测　2012 年第 27 题考直线投影，2020 年第 21 题使用直线方向与平面法向的对应关系。

题型20：微分方程的阶数与类型识别

20.1 思维导图与方法总览

含有 e^x 的方程也可能是线性的吗?

2011 年第 10 题（汇编第 66 页，题意摘述）　判断选项 $y''+y'+e^xy=\cos x$ 的阶数与线性。

最高阶导数是 y''，所以是二阶。再逐项看 y,y',y''，它们都只出现一次方，彼此也没有相乘。

$$1\cdot y''+1\cdot y'+e^x\cdot y=\cos x$$

这是二阶线性方程。系数可以随 x 变化；若有 yy' 这样的乘积，判定就会改变。

同类题怎样选方法

本题型共 2 个方法。

```
微分方程的阶数与类型识别
├─ 20-1 以出现的最高阶导数判阶
└─ 20-2 按未知函数及其导数的形式判线性、齐次或可分离
```

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

```
微分方程
├─ 按最高阶导数判阶 → 20-1
├─ 一阶
│  ├─ y' = g(x) → 21-1
│  ├─ 可拆成 x 因子与 y 因子 → 21-2
│  └─ y' + p(x)y = q(x) → 21-3
└─ 二阶及以上
   ├─ 只有最高阶导数 → 22-1
   ├─ 常系数齐次 → 22-2
   └─ 常系数非齐次、指定指数输入 → 22-2 与 22-3
```

读图时先判阶，再辨结构。若一阶方程同时可分离和线性，可比较哪条路径更简洁。

20-1 以出现的最高阶导数判阶

什么时候用 题问阶数，表达式含各种导数的幂

1. 逐项标出微分阶次。
2. 必要时先整理，排除确实抵消的项。
3. 取出现的最高阶次。

用到的公式或定理 $y^{(n)}$ 表示第 n 阶导数，$(y')^n$ 仍只有一阶导数。

易错点 最高幂与最高阶分开看。

对应真题 2020 年第 16 题、2010 年第 10 题、2009 年第 10 题、2018 年第 10 题。

20-2 按未知函数及其导数的形式判线性、齐次或可分离

什么时候用 要从若干式子中判线性、齐次或能分离

1. 整理到标准式。
2. 查未知函数与导数是否只以一次出现、系数是否只依赖自变量。
3. 再看右端是否为零或能否写成分离结构。

用到的公式或定理 一阶线性式为 $y'+p(x)y=q(x)$，可分离常见形式为 $y'=a(x)b(y)$。

易错点 线性和可分离可以同时成立。

对应真题 2018 年第 10 题、2011 年第 10 题、2007 年第 10 题。

20.2 核心概念与通俗解释

阶数 记录求过几次导，而不是把同一个导数乘了几次。

方程中实际出现的最高阶导数。 先给每项标阶。

容易出错的地方：把平方、立方的指数判成阶数。

线性与齐次 输入信号各自只被乘系数再相加，右侧决定有没有外部输入。

线性要求未知函数和导数仅一次叠加、系数仅依赖自变量；线性标准式右侧为零称齐次。 通过结构选择解法。

容易出错的地方：有 yy'、y^2 或系数依赖 y 时仍称线性。

可分离变量 整理成一边只写 x，另一边只写 y。

能把两种变量及微分分到等号两边；若除以因子需单查该因子为零的解。 拆因子后选分离或线性法。

容易出错的地方：把所有一阶方程都判为可分离。

20.3 真题归类总结

本章共 6 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

以出现的最高阶导数判阶（20-1）

2020 年第 16 题 • 汇编第 12 页　含 xy''' 等项的微分方程判阶

最高是 y'''，即三阶。y' 的三次方以及 y^4 不影响阶数。

易错点：导数次数与导数阶数不同。

2010 年第 10 题 • 汇编第 72 页　带 $(y')^2$ 及 y^3y' 的方程判阶

所用导数最高只有 y'，所以是一阶。

易错点：乘幂不提高阶数。

2009 年第 10 题 • 汇编第 78 页　同时含 $(dy/dx)^4$ 与 $(d^2y/dx^2)^3$

最高出现二阶导数，故为二阶。

易错点：不要选最高幂次 4。

按未知函数及其导数的形式判线性、齐次或可分离（20-2）

2018 年第 10 题 • 汇编第 24 页　四式中辨认一阶可分离方程

$y^2dx+xdy=0$ 可写 $y'=-(1/x)y^2$，右边是 x 与 y 的因子积。其余项至少有阶数或变量耦合形式不符。　（配合 20-1）

易错点：判断结构时先确定自变量。

2011 年第 10 题 • 汇编第 66 页　四式中辨认二阶线性方程

$y''+y'+e^xy=\cos x$ 各未知量只以一次出现且系数只依赖 x。含 yy' 的二阶候选非线性。　（配合 20-1）

易错点：一阶项与未知函数相乘也是非线性。

2007 年第 10 题 • 汇编第 90 页　选择一阶非齐次线性方程

$xy'+e^xy=x^2$ 为一阶，未知量线性，右端非零；$xy'+e^xy=0$ 则为齐次。　（配合 20-1）

易错点：含 y^2 或 $(y')^2$ 的项破坏线性。

20.4 反套路延伸题

延伸题 1　三阶导数再平方

判断 $(y''')^2+yy'=x$ 的阶数和线性。

解题线索　先只数撇号，再检查未知量是否只一次出现。

反套路点　最高导数被平方，容易误报为六阶或混淆线性。

解析　最高导数为 y'''，故为三阶。$(y''')^2$ 和 yy' 都违反线性结构。

答案　三阶非线性。

对应方法　20-1、20-2。

基于公开真题风格的推测　2020 年第 16 题和 2009 年第 10 题都用导数的乘幂干扰阶数判断，2011 年第 10 题辨认 yy' 的非线性。

延伸题 2　线性和分离能同时成立

在 $x>0$，判断 $xy'+y=0$ 的阶数、线性、齐次及能否分离。

解题线索　先除以正的 x，再观察等式右侧是否为两个因子的乘积。

反套路点　同一方程可以同时符合两种解法的识别特征。

解析　化为 $y'+y/x=0$ 可见一阶线性齐次；同时 $y'=(-1/x)y$ 可分离。若分离除以 y，还需补 $y\equiv 0$。

答案　一阶、线性、齐次、可分离。

对应方法　20-2、20-1。

基于公开真题风格的推测　2018 年第 10 题识别可分离结构，2007 年第 10 题区分齐次与非齐次线性。

题型21：一阶微分方程的通解与特解

21.1 思维导图与方法总览

同一个导数有许多原函数，初值怎样挑出其中一个？

2022 年第 16 题（汇编第 2 页，题意摘述）　已知 $y'=4x^3$，且 $y(0)=3$，求 y。

先积分，得到一族曲线 $y=x^4+C$。它们的形状一样，只是上下位置不同。

$$3=0^4+C \quad\Longrightarrow\quad y=x^4+3$$

把 $x=0$ 代入答案得到 3，再求导得到 $4x^3$，初值和方程都满足。

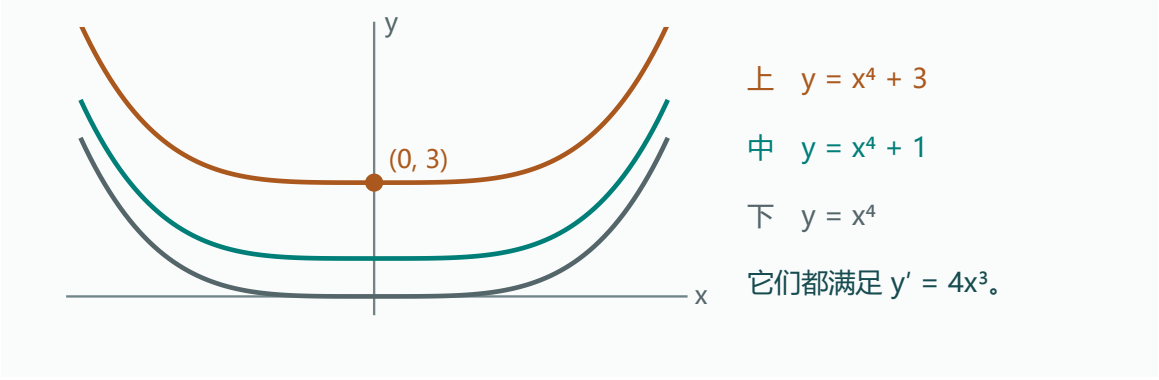

图 21-1　用初值从一族解中选出一条。在纵轴上找到点 (0,3)，三条示例曲线里只有上方这条经过它，因此 C=3。

同类题怎样选方法

本题型共 3 个方法。

一阶微分方程的通解与特解
├─ 21-1 直接积分并代初值
├─ 21-2 分离变量并检查常数解
└─ 21-3 积分因子或常数变易

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

21-1 直接积分并代初值

什么时候用 方程直接给出 y' 是 x 的函数，或给各点切线斜率

1. 把已知量写为 $y'=g(x)$。
2. 积分并加常数。
3. 用初值或过点条件求常数。

用到的公式或定理 $y=\int g(x)dx+C$，其中原函数式只计一个任意常数。

易错点 积分后要代题指定的初始点。

对应真题 2022 年第 16 题、2021 年第 16 题、2019 年第 16 题、2016 年第 13 题。

21-2 分离变量并检查常数解

什么时候用 方程可写成 $y'=a(x)b(y)$

1. 先查 $b(y)=0$ 给的常数解。
2. 在可除区间分别积分。
3. 用初值确认分支，并代回原式。

用到的公式或定理 $\int dy/b(y)=\int a(x)dx+C$。

易错点 除以 $b(y)$ 会漏常数解或奇点。

对应真题 2018 年第 22 题、2013 年第 20 题、2010 年第 19 题、2008 年第 20 题。

21-3 积分因子或常数变易

什么时候用 能整理成 $y'+p(x)y=q(x)$

1. 在首项系数非零的区间写标准式。
2. 乘积分因子 $\mu=e^{\int p}$ 得乘积导数。
3. 积分、还原 y 并代初值。

用到的公式或定理 $(\mu y)'=\mu q$。

易错点 整理时右端也必须除以首项系数；跨奇点的解需另验。

对应真题 2022 年第 22 题、2021 年第 22 题、2020 年第 22 题、2019 年第 22 题。

21.2 核心概念与通俗解释

通解、特解与初值 通解是一束曲线，初值是在指定位置要经过的点。

通解通常含任意常数，给初值后选出满足条件的解。 把完整表达式代题给点。

容易出错的地方：通解里的常数直接等于给出的点值。

积分因子 给整条等式乘一个量，把两项合成一个容易积分的东西。

让线性方程每项同乘后，左侧成为一个乘积的导数。 计算 $(\mu y)'$ 验证。

容易出错的地方：只乘左边或指数符号取反。

常数解和解区间　变形开辟一条通用路线，有些特殊解会被变形步骤挡住。

分离时查被除因子的零点；标准式不适用的点要回原方程核对。 代回原式验证有效性和可导性。

容易出错的地方：自动把局部解跨过奇点延伸。

21.3 真题归类总结

本章共 27 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

直接积分并代初值（21-1）

2022 年第 16 题 • 汇编第 2 页　$y'=4x^3,\ y(0)=3$

积分得 $y=x^4+C$，代入初值得 $C=3$，故 $y=x^4+3$。

易错点：初值用在积分之后。

2021 年第 16 题 • 汇编第 6 页　$y'=10x,\ y(1)=6$

积分得 $y=5x^2+C$，代 $x=1$ 得 $C=1$，所以 $y=5x^2+1$。

易错点：初始点是 1。

2019 年第 16 题 • 汇编第 18 页　$y'=3x^2,\ y(1)=3$

积分得 $y=x^3+C$，代入点值得 $C=2$。

易错点：3 不等于积分常数。

2016 年第 13 题 • 汇编第 36 页　由各点切线斜率 $2x$ 和经过 $(1,2)$ 求曲线

写为 $y'=2x$，得 $y=x^2+C$，代点得 $y=x^2+1$。

易错点：已知的是每一点的斜率函数。

分离变量并检查常数解（21-2）

2018 年第 22 题 • 汇编第 27 页　可分离方程的初值特解

从可辨部分判断需将 y 项与 x 项分离并分别积分，再用指定初值选常数及分支。初值的下标等小字待确认，特解待确认。

易错点：分离后需用确认的初始点选解。

2013 年第 20 题 • 汇编第 54 页　$y'=e^{x-y},\ y(0)=0$

得到 $e^y\,dy=e^x\,dx$，积分 $e^y=e^x+C$，初值使 $C=0$，故 $y=x$。

易错点：代入的是 $e^0=1$。

2010 年第 19 题 • 汇编第 72 页　$y' = 2x(1+y)$ 的通解

令 $z = 1+y$ 得 $z' = 2xz$，于是 $z = Ce^{x^2}$（含零解），所以 $y = Ce^{x^2} - 1$。　（配合 21-3）

易错点：分离除以 z 时检查 $z = 0$。

2008 年第 20 题 • 汇编第 84 页　$1 + y^2 - xyy' = 0,\ y(1) = 0$

在正则区间令 $z = 1+y^2$，得 $z' = 2z/x$、$z = Cx^2$。若只取到端点的连续延拓，初值得 $y = \pm\sqrt{x^2-1}$，从 $x > 1$ 连续接到 1；两支在 1 无有限右导数。若按通常可导初值解理解，把初值代回原式出现 $1 = 0$，故无解。原卷口径待确认。

易错点：形式初值与经典初值解须区分。

2006 年第 20 题 • 汇编第 96 页　$\cos y\,dy = \sin x\,dx$ 的通解

两边同时积分，得 $\sin y = -\cos x + C$，即 $\sin y + \cos x = C$。

易错点：以隐式给出通解可以保留分支。

积分因子或常数变易（21-3）

2022 年第 22 题 • 汇编第 4 页　$y' - xy = x$ 的通解

写成 $(y+1)' = x(y+1)$，积分因子 $e^{-x^2/2}$ 使左端成为乘积导数，故 $y = Ce^{x^2/2} - 1$。　（配合 21-2）

易错点：若用分离法，常数解 -1 对应 $C = 0$。

2021 年第 22 题 • 汇编第 9 页　$y' + y = 2$ 的通解

乘 e^x 后有 $(e^x y)' = 2e^x$，积分并除得 $y = 2 + Ce^{-x}$。　（配合 21-2）

易错点：齐次部分指数为负。

2020 年第 22 题 • 汇编第 15 页　$y' - y = 2xe^x,\ y(0) = 2$

乘 e^{-x} 得 $(e^{-x}y)' = 2x$，故 $y = (x^2 + C)e^x$。初值给 $C = 2$。

易错点：积分因子的指数与结果中的指数相反。

2019 年第 22 题 • 汇编第 21 页　$y' - y/x = xe^x$ 的通解

在 $x \neq 0$ 的区间写成 $(y/x)' = e^x$，故 $y = x(e^x + C)$。

易错点：跨不过系数的奇点。

2017 年第 22 题 • 汇编第 33 页　$y' + y = 1$ 的通解

乘 e^x 后积分 $(e^x y)' = e^x$，得 $y = 1 + Ce^{-x}$。　（配合 21-2）

易错点：积分常数最后随 e^{-x}。

2016 年第 22 题 • 汇编第 38 页　$y\,dx+(x-1)dy=0$

直接识别 $d[(x-1)y]=0$，故 $(x-1)y=C$，在 $x\neq 1$ 的区间为 $y=C/(x-1)$。若解区间包含 1 且要求可导，则只能取零解。　（配合 21-2）

易错点：直接除以 $x-1$ 会把奇点掩盖掉。

2015 年第 22 题 • 汇编第 44 页　$y'+2xy=2x$ 的通解

乘 e^{x^2} 得 $(e^{x^2}y)'=2xe^{x^2}$，积分得 $y=1+Ce^{-x^2}$。　（配合 21-2）

易错点：$y=1$ 是常数特解。

2014 年第 22 题 • 汇编第 51 页　$y'-y/x=x^3$ 的通解

把等式除以 x 化为 $(y/x)'=x^2$，故 $y=x^4/3+Cx$，$x\neq 0$。

易错点：积分后还需乘回 x。

2013 年第 28 题 • 汇编第 57 页　$y'+2xy=2xe^{-x^2}$ 通解

积分因子 e^{x^2}，得到 $(e^{x^2}y)'=2x$，所以 $y=(x^2+C)e^{-x^2}$。

易错点：等式右端也要乘积分因子。

2012 年第 19 题 • 汇编第 60 页　$y'+xy=y$ 的通解

化为 $y'+(x-1)y=0$，乘 $e^{x^2/2-x}$ 后左端为乘积导数，故 $y=Ce^{x-x^2/2}$。　（配合 21-2）

易错点：零解由 $C=0$ 保留。

2012 年第 28 题 • 汇编第 63 页　$y'-y=\cos x,\ y(0)=0$

乘 e^{-x} 后积分或代入试验 $y_p=(\sin x-\cos x)/2$，通解 $y=Ce^x+y_p$。代初值得 $C=1/2$，特解 $(e^x+\sin x-\cos x)/2$。

易错点：代回可同时检查系数及初值。

2011 年第 19 题 • 汇编第 66 页　$y'-y=1$ 的通解

令 $z=y+1$ 得 $z'=z$，所以 $y=Ce^x-1$。亦可直接用积分因子。　（备用或配合 21-2）

易错点：常数特解为 -1。

2011 年第 27 题 • 汇编第 69 页　含 $\cot x$ 的一阶线性方程

在 $\cot x$ 可除的区间，化为 $y'-y\sin x=2xe^{-\cos x}$。乘 $e^{\cos x}$ 得 $(ye^{\cos x})'=2x$，故 $y=(x^2+C)e^{-\cos x}$。

易错点：原式含 $\cot x$，有效区间先按原式确定。

2010 年第 27 题 • 汇编第 74 页　$xy'+2y=3x$ 的通解

在 $x\neq 0$ 上写为 $y'+2y/x=3$，乘 x^2 得 $(x^2y)'=3x^2$，故 $y=x+C/x^2$。若解须穿过 0，只有 $C=0$ 能连续。

易错点：标准式的区间要避开 0。

2009 年第 28 题 • 汇编第 81 页　$y'+y\tan x=\sec x,\ y(0)=0$

在含零的相邻奇点区间乘 $\sec x$，得 $(y\sec x)'=\sec^2 x$。积分得 $y=\sin x+C\cos x$，初值使 $C=0$。

易错点：检查 $\cos x\neq 0$ 的解区间。

2008 年第 27 题 • 汇编第 86 页　$(x+1)y'-2y=(x+1)^4$

在 $x\neq -1$ 处标准化，积分因子 $(x+1)^{-2}$，故 $[y/(x+1)^2]'=x+1$。解 $y=\frac{1}{2}(x+1)^4+C(x+1)^2$。

易错点：常规通解先在系数连续的区间写。

2007 年第 25 题 • 汇编第 92 页　$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ 的通解

乘 $e^{\sin x}$ 后得到 $(ye^{\sin x})'=1$，故 $y=(x+C)e^{-\sin x}$。

易错点：积分因子和右端的指数正好抵消。

2006 年第 27 题 • 汇编第 99 页　$xy'-y=1+x^3,\ y(1)=0$

在含 1 的正半轴除以 x^2，得 $(y/x)'=1/x^2+x$。积分得 $y=-1+x^3/2+Cx$，由初值 $C=1/2$。

易错点：分母 x^2 来自商的导数。

21.4 反套路延伸题

延伸题 1　初值落在被除掉的常数解

求 $y'=(x-1)(y-2)$ 满足 $y(1)=2$ 的解。

解题线索　设 $z=y-2$，把 $z=0$ 和非零支都保留。

反套路点　按分离法直接除以 $y-2$ 会丢掉所需解。

解析　$z'=(x-1)z$，积分因子或分离补零后得 $z=Ce^{(x-1)^2/2}$。代入 $z(1)=0$ 得 $C=0$。将 $y=2$ 代回左右均为零。

答案　$y\equiv 2$。

对应方法　21-2、21-3。

基于公开真题风格的推测　2010 年第 19 题具有常数偏移的可分离结构，2022 年第 16 题要求按初值确定特解。

延伸题 2　奇点上的初值不能选定常数

求定义在零点附近且可导的 $xy'-y=x^2$ 的解，给 $y(0)=0$。是否唯一?

解题线索　两边各解一次，再回到零点检查连续与可导。

反套路点　标准式在零点不能除以 x，且给出的初值冗余。

解析　在 $x\neq 0$，$(y/x)'=1$，故 $y=x^2+C_{\pm}x$。在零点，方程只要求 $y(0)=0$。左右差商分别趋 C_-、C_+，可导要求两者相等。任取同一个 C 都满足原方程。

答案　$y=x^2+Cx$，C 任意，解不唯一。

对应方法　21-3、21-2。

基于公开真题风格的推测　2006 年第 27 题通过 $(y/x)'$ 整理并代初值，2008 年第 20 题提醒在初值点核对原方程。

题型22：高阶微分方程的通解与特解形式

22.1 思维导图与方法总览

特征方程只有一个不同的根，第二个解从哪里来？

2020 年第 10 题（汇编第 12 页，题意摘述）　求 $y''+6y'+9y=0$ 的通解。

试取指数形式 e^{rx}，代入得到 $r^2+6r+9=(r+3)^2=0$。根 -3 重复两次，第二个独立解需在指数前乘 x。

$$y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$$

如果仅写两个常数分别乘同一个 e^{-3x}，合并后只剩一个任意常数，会漏掉一族解。

同类题怎样选方法

本题型共 4 个方法。

> 高阶微分方程的通解与特解形式
> ├─ 22-1 对仅含高阶导数的方程逐次积分
> ├─ 22-2 以特征方程求齐次通解
> ├─ 22-3 按右端类型及共振情形设特解
> └─ 22-4 把候选函数及其导数代回方程验解

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

22-1 对仅含高阶导数的方程逐次积分

什么时候用　方程只剩 y'' 或更高阶导数与已知函数

1. 按阶数从最高导数逐次积分。
2. 每次加入一个独立常数。
3. 用给定条件并代回原式。

用到的公式或定理　$y''=g(x)$ 可先得 $y'=\int g(x)dx+C_1$ 再积分。

易错点　第二次积分时第一个常数会产生线性项。

对应真题　2012 年第 9 题。

22-2 以特征方程求齐次通解

什么时候用　出现常系数齐次线性方程

1. 将 $y^{(k)}$ 对应 r^k 写特征方程。
2. 求根和重数。
3. 按根类型列独立解并线性组合。

用到的公式或定理　二重实根 r 产生 e^{rx}, xe^{rx}；共轭根 $\alpha \pm i\beta$ 产生 $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$。

易错点　重根不能把同一指数解写两遍。

对应真题　2022 年第 10 题、2021 年第 9 题、2020 年第 10 题、2019 年第 10 题。

22-3 按右端类型及共振情形设特解

什么时候用　题问非齐次特解形式，右端有指数乘多项式

1. 从右端确定拟设多项式的次数和指数。
2. 检查指数是不是齐次特征根及重数。
3. 若有共振乘 x^s，按题意决定要不要继续解系数。

用到的公式或定理　右端 $P_n(x)e^{ax}$，特解拟设 $x^sQ_n(x)e^{ax}$，s 为 a 的特征根重数（非根取 0）。

易错点　不要把非齐次特解与齐次通解混在一起。

对应真题　2006 年第 10 题。

22-4 把候选函数及其导数代回方程验解

什么时候用　给候选函数、问它满足什么方程或是否为解

1. 按各候选方程需要的阶数求导。
2. 逐个代入。
3. 查是否恒成立，并检查另给初值。

用到的公式或定理　例如 $\sin x$ 满足 $y''+y=0$。

易错点　在一个点等式成立不足以验解。

对应真题　2017 年第 9 题、2014 年第 9 题、2012 年第 9 题。

22.2 核心概念与通俗解释

常系数齐次线性方程　不同基本振动或增长方式可以相加。

系数为常数，方程右端为零，解的线性组合仍是解。 列特征方程区分单根、重根与复根。

容易出错的地方：漏掉一个独立解或把一般解只有一个常数。

非齐次、特解和共振　外部输入若刚好与已有模式同型，要换一个仍合适的试探式。

任一特解加齐次通解构成非齐次通解。同型试探撞上齐次解时需额外乘 x 的幂。 先查特征根是否与频率或指数重合。

容易出错的地方：看到指数右端就一定乘 x。

逐次积分和初值　把一连串求导反过来，每反一步补一个自由常数。

只含最高导数时可以依次恢复低阶导数和函数；各次有积分常数。 根据所给函数值、导数值分别定常数。

容易出错的地方：将二阶方程仅积分一次就结束。

22.3 真题归类总结

本章共 14 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

对仅含高阶导数的方程逐次积分（22-1）

2012 年第 9 题 • 汇编第 59 页　$y''=\cos x$ 的通解

积分一次为 $y'=\sin x+C_1$，再积分为 $y=-\cos x+C_1x+C_2$。　（配合 22-4）

易错点：积分两次产生两个独立常数。

以特征方程求齐次通解（22-2）

2022 年第 10 题 • 汇编第 2 页　$y''-y'-12y=0$

特征方程 $(r-4)(r+3)=0$，得 $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-3x}$。

易错点：根的符号按方程常数项核对。

2021 年第 9 题 • 汇编第 6 页　$y''+5y'+6y=0$

$(r+2)(r+3)=0$，故 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$。

易错点：两个实根都为负。

2020 年第 10 题 • 汇编第 12 页　$y''+6y'+9y=0$

特征根 -3 为二重根，通解 $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$。

易错点：重根需要独立的第二解 xe^{-3x}。

2019 年第 10 题 • 汇编第 18 页　$y''+y'-2y=0$

因式分解 $(r-1)(r+2)=0$，得 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$。

易错点：两个独立常数。

2016 年第 10 题 • 汇编第 36 页　$y''-y=0$ 的通解

$r^2=1$ 得 ±1 两根，所以 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$。

易错点：两个指数不能合成只有一个常数。

2015 年第 9 题 • 汇编第 42 页　$y''+y'-6y=0$ 的通解

由 $(r+3)(r-2)=0$ 得 $C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$。

易错点：别互换指数的数值和符号。

2013 年第 10 题 • 汇编第 54 页　$y''-2y'-3y=0$ 的通解

$(r-3)(r+1)=0$，得 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$。

易错点：系数的符号只由代数方程来。

2009 年第 20 题 • 汇编第 78 页　$4y''+4y'+y=0$ 的通解

特征式 $(2r+1)^2=0$，根 $-1/2$ 二重，解 $y=(C_1+C_2x)e^{-x/2}$。

易错点：重复根不是 -1。

2008 年第 10 题 • 汇编第 84 页　$y''-3y'-10y=0$ 的通解

特征式 $(r-5)(r+2)=0$，解 $y=C_1e^{5x}+C_2e^{-2x}$。

易错点：根和为 3，积为 -10。

2007 年第 20 题 • 汇编第 90 页　$y''-2y'+y=0$ 的通解

$(r-1)^2=0$，重根 1，故 $y=(C_1+C_2x)e^{x}$。

易错点：给重根配 xe^x。

按右端类型及共振情形设特解（22-3）

2006 年第 10 题 • 汇编第 96 页　$y''-y'-12y=xe^{3x}$ 的待定特解形式

齐次根 $4,-3$，3 非特征根，无共振；右端一次多项式，试 $y_p=(ax+b)e^{3x}$。

易错点：只有指数对应特征根时才额外乘 x 的幂。

把候选函数及其导数代回方程验解（22-4）

2017 年第 9 题 • 汇编第 30 页　选择 $y''-y'=0$ 的一个特解

候选 e^x 的一、二阶导数相同。也可由根 $0,1$ 得通解 $C_1+C_2e^x$ 后匹配。　（备用或配合 22-2）

易错点：题目问一个解，原式不要求初始条件。

2014 年第 9 题 • 汇编第 48 页　识别 $y=\sin x$ 满足的方程

求 $y'=\cos x$，$y''=-\sin x$，逐候选代入，确认 $y''+y=0$。

易错点：检验恒等于零，而非只在若干点成立。

22.4 反套路延伸题

延伸题 1　同样的指数形式遇上共振

求 $y''-y'-12y=2e^{4x}$ 的通解。

解题线索　先列齐次特征方程，再试 Axe^{4x}。

反套路点　右端指数 4 是齐次特征单根，直接猜 Ae^{4x} 会被消去。

解析　齐次根为 $4,-3$，齐次通解 $C_1e^{4x}+C_2e^{-3x}$。代 $y_p=Axe^{4x}$，原算子作用得到 $7Ae^{4x}$，由右端得 $A=2/7$。

答案　$y=C_1e^{4x}+C_2e^{-3x}+(2/7)xe^{4x}$。

对应方法　22-3、22-2。

基于公开真题风格的推测　2006 年第 10 题以指数乘多项式考特解形式，2022 年第 10 题对应同一齐次算子的两根。

延伸题 2　复根转为实解并用两条初值

解 $y''+4y=0$，给 $y(0)=1,\ y'(0)=-2$。

解题线索　根 $\pm 2i$ 对应余弦与正弦。

反套路点　特征方程没有实根，但存在两个实基函数。

解析　通解 $A\cos 2x+B\sin 2x$。由 $y(0)=A=1$，$y'(0)=2B=-2$，得 $B=-1$，代回同时满足方程与初值。

答案　$y=\cos 2x-\sin 2x$。

对应方法　22-2、22-4。

基于公开真题风格的推测　2014 年第 9 题用三角函数检验二阶齐次方程，2020 年第 10 题要求按特征根类型写通解。

题型23：定积分应用：面积、旋转体体积与质量

23.1 思维导图与方法总览

同一块区域，面积和旋转体体积为何列出不同积分？

2022 年第 23 题（汇编第 4 页，题意摘述）　区域介于 $y=x^4+1$ 与 x 轴之间，$0\le x\le 1$。求面积及绕 x 轴旋转后的体积。

在 x 处切一条宽 dx 的竖条，高 $h=x^4+1$。平放时面积为 $h\,dx$；绕轴后成为一片薄圆盘，体积为 $\pi h^2\,dx$。

$$A=\int_0^1 (x^4+1)\,dx=\frac{6}{5},\qquad V=\pi\int_0^1 (x^8+2x^4+1)\,dx=\frac{68\pi}{45}$$

体积里要平方整条半径。漏写中间的 $2x^4$，就等于漏掉了圆盘的一部分。

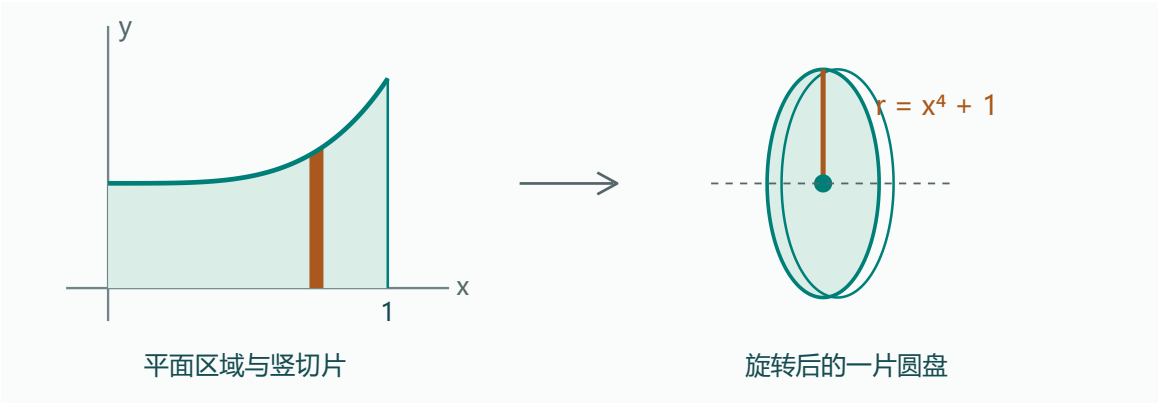

图 23-1　从一条竖切片到一片圆盘。左图切片的高度就是右图圆盘的半径；将截面积 πr² 乘薄片厚度 dx，再沿区间累加。

同类题怎样选方法

本题型共 3 个方法。

> 定积分应用：面积、旋转体体积与质量
> ├─ 23-1 按交点和边界列面积积分
> ├─ 23-2 以圆盘或圆环截面求体积
> └─ 23-3 用面密度乘面积或积分求质量

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

```
2018 年第 24 题原图边界
      上边界 y = eˣ
x=0  │   区域 D   │  x=1
      下边界 y = 0（也是旋转轴）
竖切 → 贴轴，内半径为 0 → 圆盘
```

读图时先从两个竖边确定积分限，再沿竖切片量上曲线至横轴的距离，这个距离是圆盘半径。

```
另一种切片
├─ 轴在片外 → 内、外半径取近、远端的距离
└─ 轴穿过片 → 内半径为 0，外半径取两端距离的较大者
```

读图时先看旋转轴是否经过切片，这一步决定截面是圆环还是实心圆盘。

23-1 按交点和边界列面积积分

什么时候用　题问由两条或多条曲线围成的平面图形面积

1. 联立查交点与区间。
2. 用竖切的上减下或横切的右减左。
3. 边界换轨时拆段再积分。

用到的公式或定理　$A=\int[y_{上}-y_{下}]\,dx$，或 $\int[x_{右}-x_{左}]\,dy$。

易错点　先确定真实封闭区域，避免把无界区域也算入。

对应真题　2022 年第 23 题、2021 年第 23 题、2020 年第 23 题、2019 年第 23 题。

23-2 以圆盘或圆环截面求体积

什么时候用　题问区域绕指定轴成体积

1. 取垂直于旋转轴的切片。
2. 从旋转轴量外、内半径，截过轴时内半径为零。
3. 积分 $\pi(R^2-r^2)$，需要时分段。

用到的公式或定理　$V=\pi\int(R^2-r^2)\,ds$，绕 x 轴时惯用 $s=x$，绕 y 轴时惯用 $s=y$。

易错点　圆环面积不是 $\pi(R-r)^2$；跨轴时两个半径可能交换谁在外。

对应真题　2011 年第 29 题、2022 年第 23 题、2021 年第 23 题、2020 年第 23 题。

23-3 用面密度乘面积或积分求质量

什么时候用　题给薄片面密度与边界

1. 先确定每片面积。
2. 用密度乘每片面积。
3. 沿整个区域累加，常密度可提到积分外。

用到的公式或定理　常密度 $m=\rho A$；若密度只依赖 x，可写 $m=\int\rho(x)[y_{上}-y_{下}]\,dx$。

易错点　面积与质量需不同单位。

对应真题　2007 年第 29 题。

23.2 核心概念与通俗解释

有效边界与积分变量　像用一排细纸条拼满区域，每条只量被区域占住的那一段。

选一个切片方向，界之间的距离决定面积。 换成按 y 切可减少分段。

容易出错的地方：默认所有题都对 x 积分。

圆盘与圆环　实心硬币与中间有孔的垫圈。

切片绕轴，贴住轴时内半径为零；留有空隙时形成圆环。 先定轴的位置，再分别取轴到边界的距离。



图 23-2　沿旋转轴方向看截面。左侧切片贴住轴；右侧有一个空孔，从外圆面积中扣掉内圆面积。

容易出错的地方：取上下边界差做半径，或跨轴仍算两个重叠圆盘。

薄片面密度　同样面积的两块材料可以有不同重量。

单位面积的质量，均匀时等于常数。 把密度和切片宽度结合。

容易出错的地方：直接把几何面积当质量。

23.3 真题归类总结

本章共 17 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

按交点和边界列面积积分（23-1）

2022 年第 23 题 • 汇编第 4 页　$y=x^4+1$、$x=0,1$、$y=0$ 的面积与绕 x 轴体积

在 $0\le x\le 1$，面积 $\int_0^1(x^4+1)dx=6/5$。绕 x 轴是圆盘，体积 $\pi\int_0^1(x^4+1)^2dx=68\pi/45$。　（配合 23-2）

易错点：平方的是整条半径。

2021 年第 23 题 • 汇编第 10 页　余弦拱形区域的面积与绕 x 轴体积

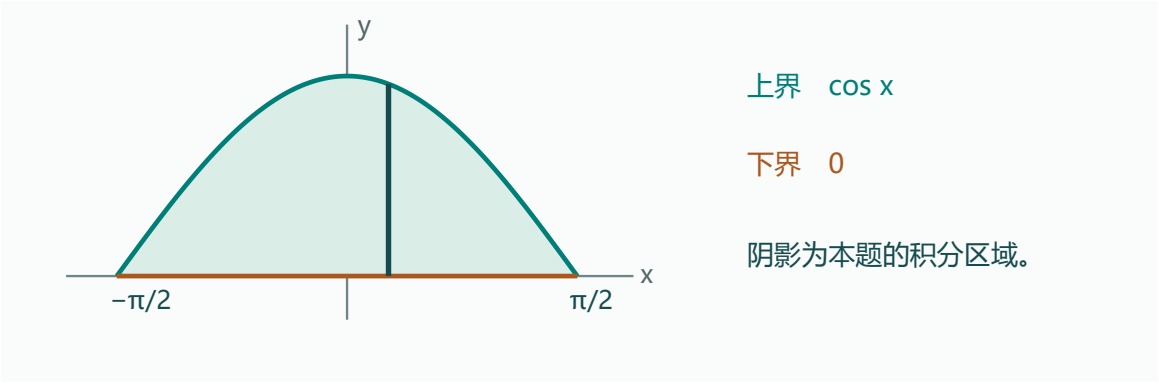

图 23-3　完整的余弦拱形。从 −π/2 到 π/2，曲线在横轴上方；竖切片贴着旋转轴。

在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上 $\cos x \geq 0$。面积为 $[\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$。体积 $\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \pi^2/2$。　(配合 23-2)

易错点：区间为完整的一段余弦拱形。

2020 年第 23 题 • 汇编第 16 页　$y = x - x^2$ 和 x 轴围成的区域

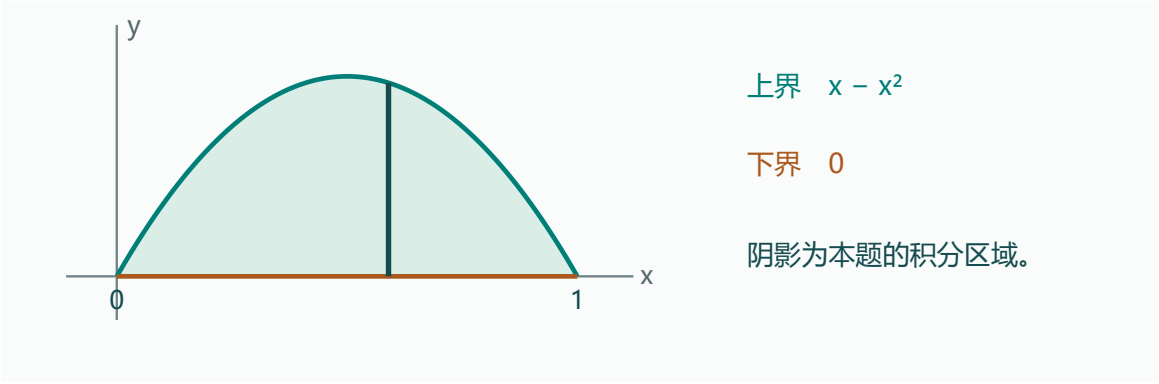

图 23-4　抛物线与横轴围住的一段。从两个零点确定积分限；区间内部曲线为正，切片高度就是旋转半径。

交点横坐标 $0, 1$，中间曲线在轴上。面积 $1/2 - 1/3 = 1/6$；体积 $\pi \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \pi/30$。(配合 23-2)

易错点：体积的被积函数不是面积被积函数本身。

2019 年第 23 题 • 汇编第 21 页　　$y=\sqrt{1+x}$ 与 $y=1+x$ 的围成区域

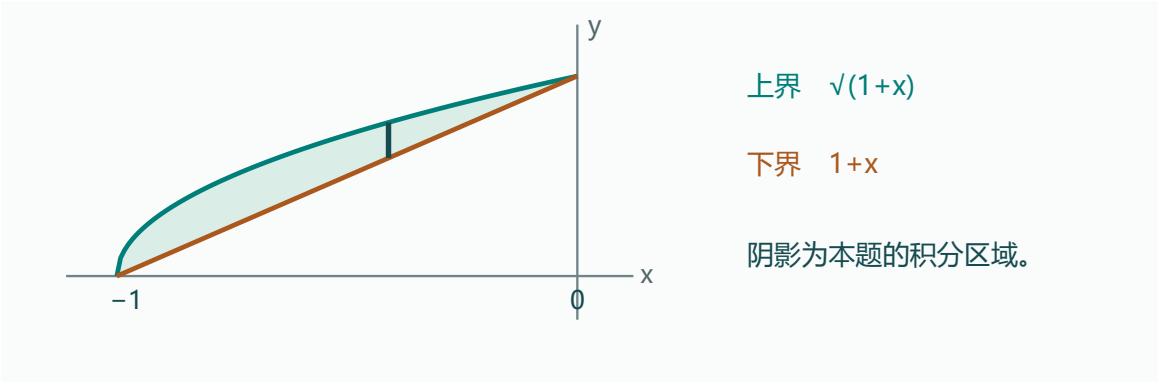

图 23-5　两条曲线之间的圆环切片。两交点之间，根式曲线在上；绕横轴时，两个函数值分别给出外、内半径。

令 $u=1+x$，交点对应 $u=0,1$，外边界为 $\sqrt{u}$、内边界为 u。面积 $\int_0^1(\sqrt{u}-u)du=1/6$，体积 $\pi\int_0^1(u-u^2)du=\pi/6$。　(配合 23-2)

易错点：圆环外半径平方减内半径平方。

2018 年第 24 题 • 汇编第 28 页　　从原图读 $y=e^x$ 下方阴影区域

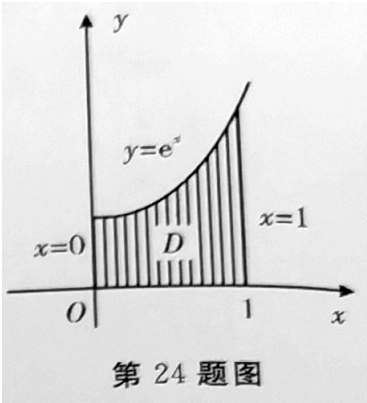

图 23-6　2018 年第 24 题试卷原图。沿原图的竖线从 x 轴量到曲线，长度为 e^x；同一长度在旋转后成为圆盘半径。

图上标明 $x=0$、$x=1$、x 轴及曲线 $y=e^x$。面积 $[e^x]_0^1=e-1$；绕 x 轴圆盘体积 $\pi\int_0^1 e^{2x}dx=\pi(e^2-1)/2$。　(配合 23-2)

易错点：直接从原图辨认上下边界。

2017 年第 23 题 • 汇编第 33 页　$x=y^2$ 与 $x=y+2$ 围成区域，绕 y 轴

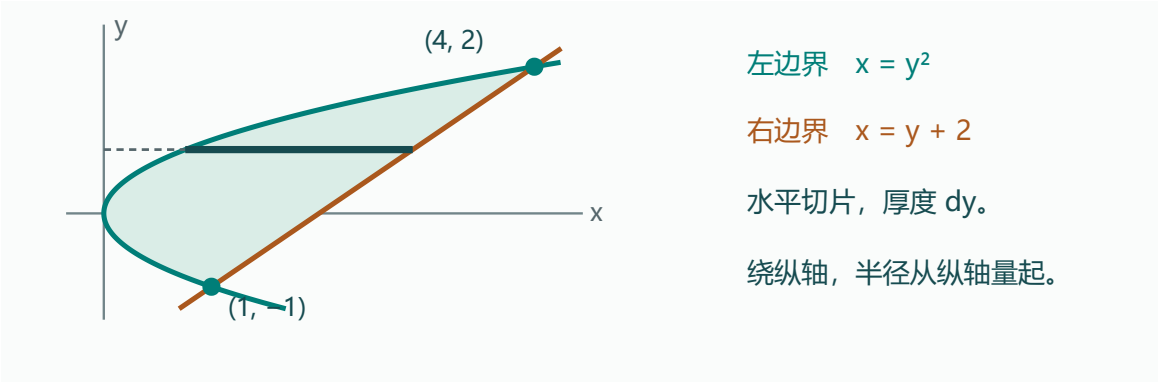

图 23-7　横向切片的一端在抛物线上，一端在直线上。先从交点读出 −1≤y≤2；绕 y 轴后，左端和右端到轴的距离分别是内、外半径。

两曲线相交于 $y=-1,2$，以 dy 切片，右减左给面积 $\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy=9/2$。两边界都在 y 轴右侧，体积 $\pi\int_{-1}^{2}[(y+2)^2-y^4]dy=72\pi/5$。　(配合 23-2)

易错点：y^2 作为半径时平方成 y^4。

2016 年第 24 题 • 汇编第 39 页　第一象限余弦下面积与体积

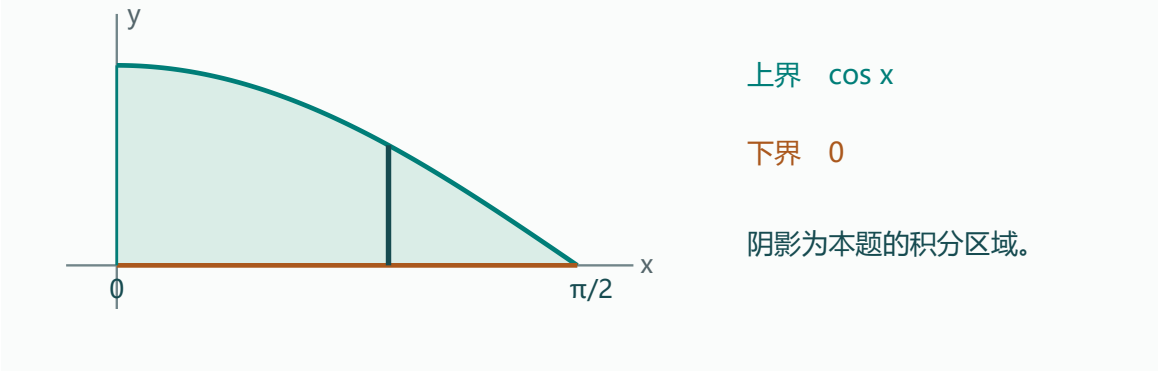

图 23-8　第一象限内的半段余弦拱。左界是纵轴；从 0 走到 π/2，竖切片高度由 1 降至 0。

边界为 $x=0$，$y=0$，$y=\cos x$，区间 $[0,\pi/2]$。面积 1；绕 x 轴体积由 $\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2$ 得 $\pi^2/4$。　(配合 23-2)

易错点：题给区间只有半个拱形。

2015 年第 23 题 • 汇编第 45 页　在 $0 \le x \le 1$，$y = e^x$ 和 $y = x$ 之间

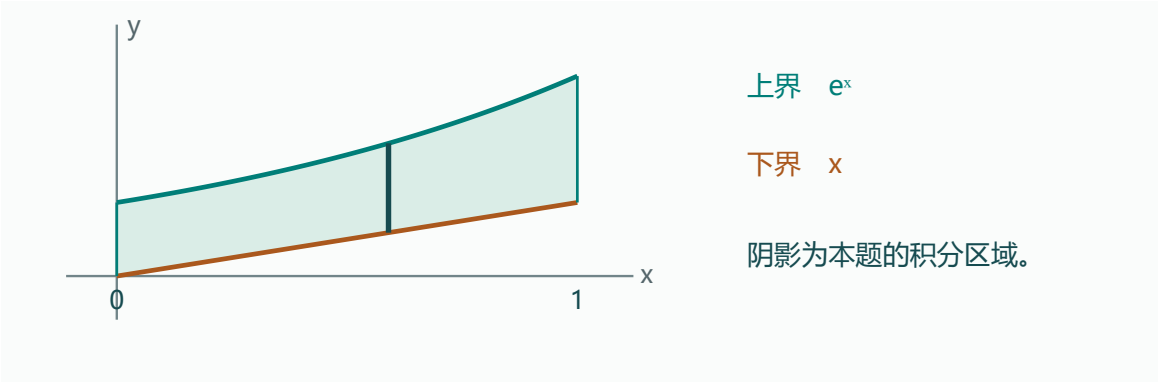

图 23-9　指数曲线与直线围成的带状区域。竖切片有一段悬在横轴上方，所以旋转后要扣去半径为 x 的内孔。

因 $e^x \ge 1 + x$，上界为 e^x。面积 $\int_0^1 (e^x - x)dx = e - 3/2$；绕 x 轴体积 $\pi \int_0^1 (e^{2x} - x^2)dx = \pi[(e^2 - 1)/2 - 1/3]$。　(配合 23-2)

易错点：圆环保留内半径 x。

2014 年第 23 题 • 汇编第 51 页　$y = x$ 与 $y = x^2$ 的围成区域

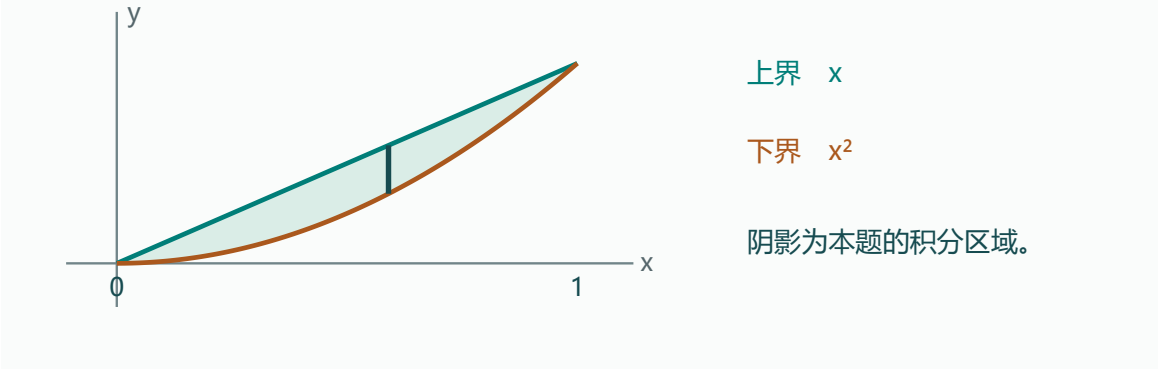

图 23-10　直线与抛物线的交点给出积分限。两个端点处曲线重合；中间的竖切片从 x² 延伸到 x。

交点 $0, 1$，上界 x、下界 x^2。面积 $\int_0^1 (x - x^2)dx = 1/6$；体积 $\pi \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = 2\pi/15$。　(配合 23-2)

易错点：截面积不是 $\pi(x - x^2)^2$。

2013 年第 29 题 • 汇编第 57 页　$y=\sqrt{x}$、$x+y=6$ 和 x 轴围成区域

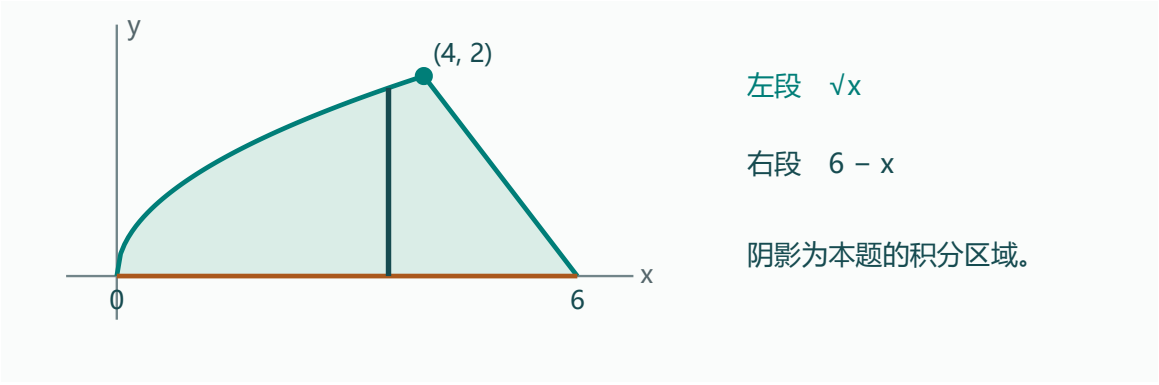

图 23-11　上边界在交点换了一条曲线。在交点 (4,2) 处拆开：先沿根式曲线读高度，再沿直线读到横轴。

曲线交于 $(4,2)$，与轴的外端为 $0,6$。分两段，上界依次 $\sqrt{x}$ 与 $6-x$。面积 $16/3+2=22/3$；绕 x 轴体积 $\pi(8+8/3)=32\pi/3$。　(配合 23-2)

易错点：边界在 $x=4$ 处更换。

2012 年第 29 题 • 汇编第 63 页　$\sqrt{y}=x$，$y=2-x$ 及 x 轴，绕 y 轴

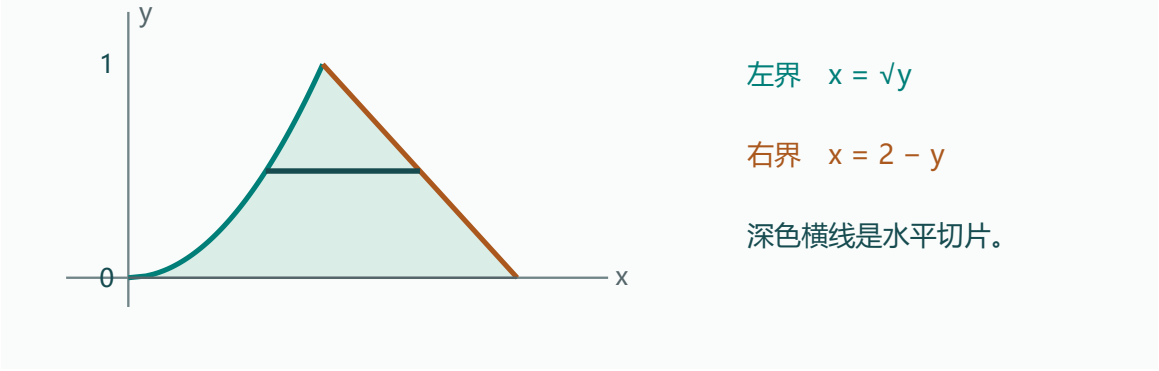

图 23-12　由两条边界读出圆环半径。从纵轴量到切片左端是内半径，量到右端是外半径；两条边在 (1,1) 相接。

取水平截线 $0\le y\le 1$，边界 $x=\sqrt{y}$ 和 $x=2-y$，故面积 $\int_0^1(2-y-\sqrt{y})dy=5/6$，体积 $\pi\int_0^1[(2-y)^2-y]dy=11\pi/6$。　(配合 23-2)

易错点：横切用 dy，轴是竖直的。

2010 年第 29 题 • 汇编第 75 页　　$y=e^{x}$，$y=2^{-x}$，$x=1$ 围成区域

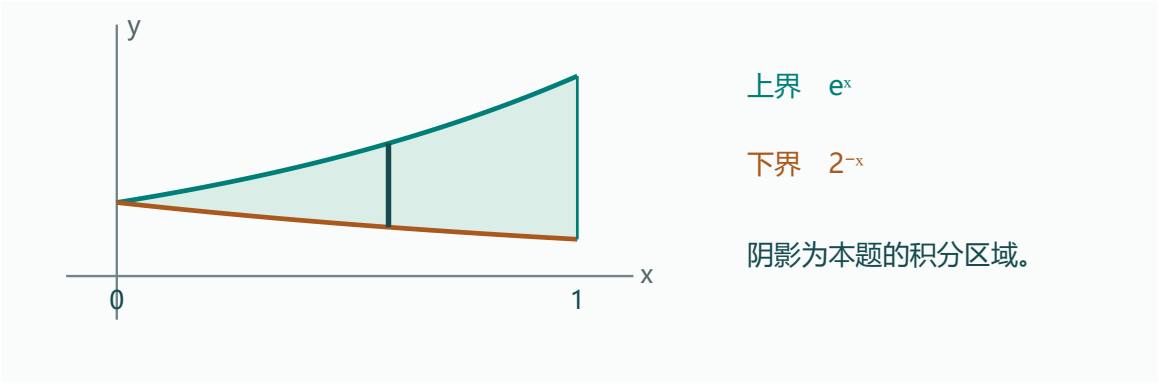

图 23-13　两条指数曲线的上下关系。在 x=0 处两曲线同高，向右一升一降，到 x=1 由竖直边界封口。

两指数曲线交在 $x=0$，在 $[0,1]$ 上以 e^{x} 为上界。面积 $e-1-1/(2\ln 2)$；绕 x 轴体积 $\pi[(e^{2}-1)/2-3/(8\ln 2)]$。　　(配合 23-2)

易错点：2^{-x} 的积分含 $-\ln 2$。

2009 年第 30 题 • 汇编第 82 页　　由 $y=x^{2}$ 与 $y=2x+3$ 围成的面积

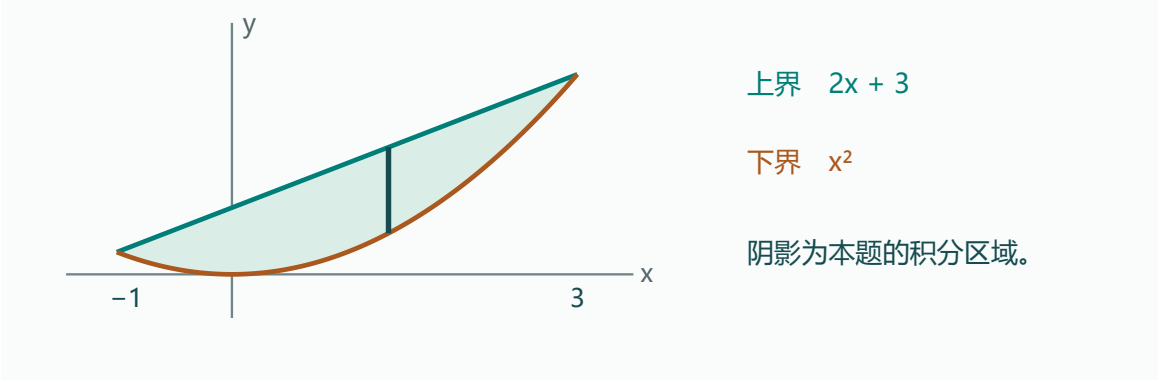

图 23-14　两条曲线间的面积。沿标出的竖线从抛物线量到直线，这一段的长度就是面积积分中的高度。

交点为 $x=-1,3$，中间直线在上。面积 $\int_{-1}^{3}[4-(x-1)^{2}]dx=32/3$。

易错点：先求交点再列上下差。

2008 年第 29 题 • 汇编第 87 页　$y=1/x,\ y=x,\ y=2$ 围成的面积

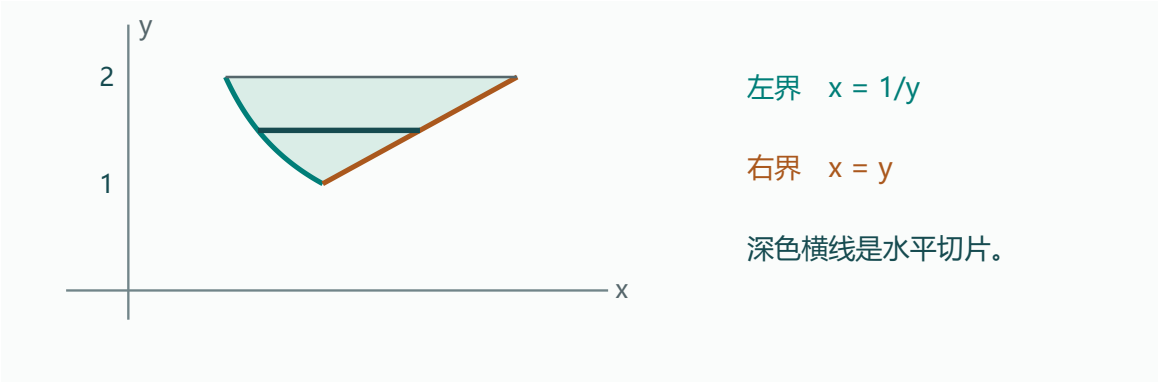

图 23-15　用横切避开左右分段。从 y=1 到 y=2，水平切片始终从双曲线连向直线，因此只需一个积分。

封闭区域在第一象限，按 y 切片，$1\le y\le 2$、$1/y\le x\le y$。面积 $\int_1^2 (y-1/y)dy = 3/2-\ln 2$。

易错点：沿 x 切会遇到分段，用 dy 更直接。

2006 年第 29 题 • 汇编第 99 页　对数曲线、切线与 x 轴的面积及体积

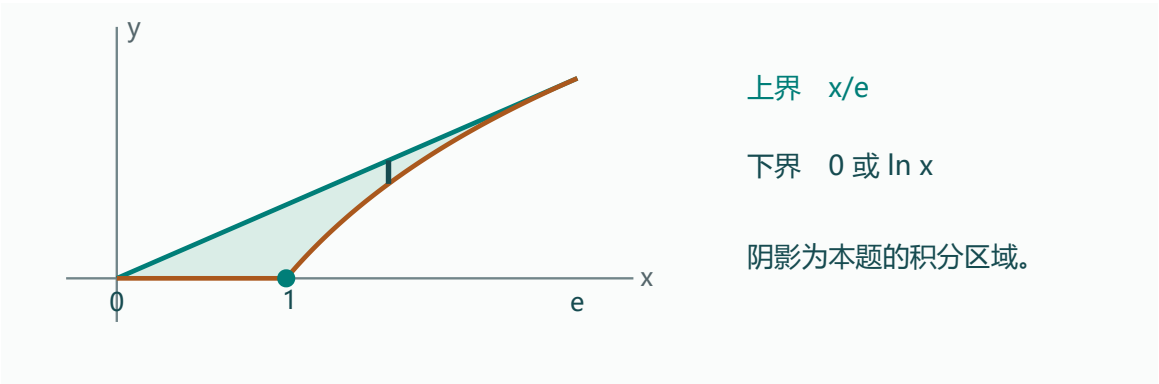

图 23-16　对数曲线下方的边界在 x=1 改变。从 0 到 1 的切片贴着轴，从 1 到 e 的切片下方留有空隙，因此先圆盘、后圆环。

（1）在 $(e,1)$ 切线斜率 $1/e$，得 $y=x/e$。（2）交轴位置分别是 1 与 0，且在 $[1,e]$ 上切线位于对数曲线上方，面积 $\int_0^e x/e\,dx-\int_1^e \ln x\,dx = e/2-1$。（3）第一段圆盘、第二段圆环，体积 $\pi\left(\int_0^e (x/e)^2dx-\int_1^e(\ln x)^2dx\right)=\pi(2-2e/3)$。　(配合 23-2)

易错点：下边界在 $x=1$ 改变。

以圆盘或圆环截面求体积（23-2）

2011 年第 29 题 • 汇编第 69 页　$y=\ln x$、$y=0$、$x=e$ 围成区域，绕 y 轴

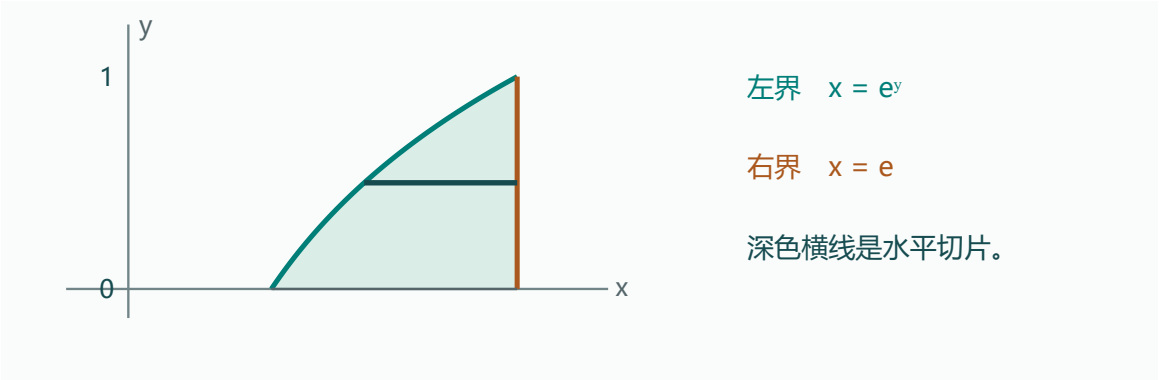

图 23-17　绕纵轴的水平切片。外半径保持为 e，内半径随高度增大；它们在最上方相等。

对 $0\le y\le 1$ 水平切片，外半径 e、内半径 e^{y}。故 $\pi\int_0^1(e^2-e^{2y})dy=\pi(e^2+1)/2$。

易错点：从旋转轴量半径，不能直接平方 $\ln x$。

用面密度乘面积或积分求质量（23-3）

2007 年第 29 题 • 汇编第 93 页　密度 3 的薄片由 $y=1-x^2$ 与 x 轴围成

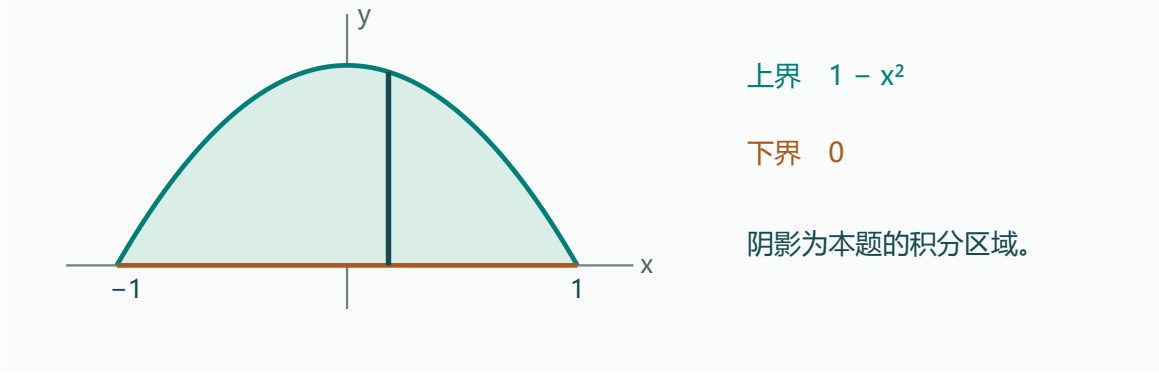

图 23-18　把均匀薄片切成窄条。窄条的高乘宽给面积；再乘题给的均匀面密度 3，才是这一条的质量。

交点 $x=\pm1$。面积 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=4/3$，均匀薄片质量 $3\cdot 4/3=4$。　（配合 23-1）

易错点：质量需乘面密度。

23.4 反套路延伸题

延伸题 1　区域跨轴时只保留较大圆盘

在 $0 \le x \le 1$，区域位于 $y = -x$ 与 $y = 1 - x$ 之间。求面积及绕 x 轴的体积。

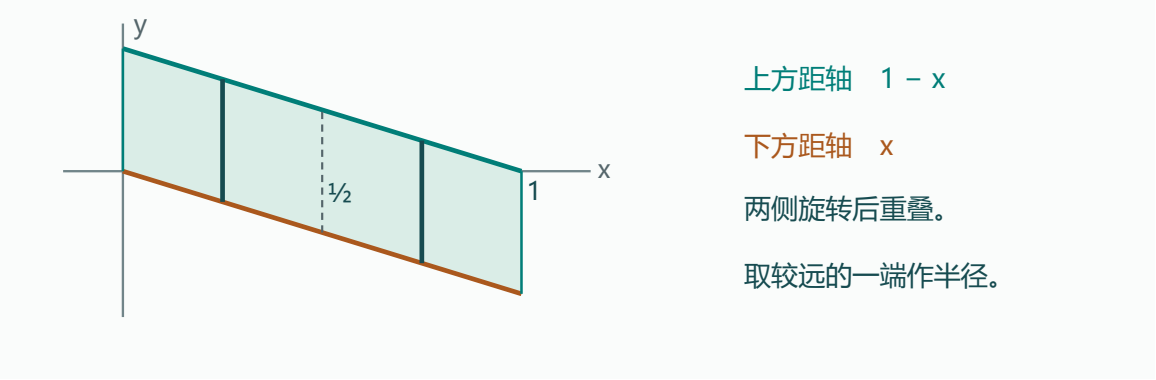

图 23-19　跨轴的切片，哪一端决定半径。比较两条粗切片：在 1/2 左侧上端较远，在右侧下端较远；整个截面始终实心。

解题线索　两侧到轴的距离分别为 $x, 1-x$，先比大小。

反套路点　每条切片都经过轴，两侧扫出的圆盘会重叠。

解析　面积宽恒 1，故为 1。切片扫出的并集是半径 $\max(x, 1-x)$ 的圆盘。以 $x = 1/2$ 分段，体积为 $\pi[\int_0^{1/2}(1-x)^2dx + \int_{1/2}^1 x^2dx] = 2\pi(1-1/8)/3$。

答案　面积 1，体积 $7\pi/12$。

对应方法　23-2、23-1。

基于公开真题风格的推测　2022 年第 23 题用圆盘求体积，2019 年第 23 题用内、外半径求圆环。本题要求先识别何处没有内孔。

延伸题 2　不同位置的薄片密度不同

区域由 $y = 1 - x^2$、$y = 0$ 围成，面密度为 $\rho(x) = 2 + x^2$，求质量。

解题线索　每个竖切片具有该横坐标的密度。

反套路点　密度不恒定，不能提作区域面积的倍数。

解析　交点为 ± 1，片高为 $1 - x^2$。质量 $\int_{-1}^1 (2 + x^2)(1 - x^2)dx = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^4)dx = 4 - 2/3 - 2/5$。

答案　$44/15$。

对应方法　23-3、23-1。

基于公开真题风格的推测　2007 年第 29 题把面积转成均匀薄片质量，这里让薄片密度沿横向变化。

题型24：实际情境的最优化

24.1 思维导图与方法总览

售价随销量变化，每件利润最高时，总利润也最高吗？

2016 年第 23 题（汇编第 39 页，题意摘述） 销量为 q，单价为 $420-q/2$，总成本为 $30000+100q$。求利润最大时的销量，以及此时每件的售价。

收入等于销量乘单价。减去总成本后，利润是开口向下的二次函数，可以直接用配方看最高点。

$$P(q)=320q-\tfrac{1}{2}q^2-30000=21200-\tfrac{1}{2}(q-320)^2$$

平方项在 $q=320$ 时为零，此时利润最大。最后代回题目给的售价关系，$p=420-320/2=260$。答案是销量 320 件，每件售价 260 元。

同类题怎样选方法

本题型共 3 个方法。

```
实际情境的最优化
├─ 24-1 成本、收益与利润建模
├─ 24-2 几何、容量或铺设费用建模
└─ 24-3 比较可行区间的驻点与边界
```

读图时从题型往下找与题目最匹配的识别信号，再用方法编号回查步骤。

```
2015 年第 24 题原图关系
河岸    C ──── D ──── A
        |     /       /
  2 km  |   /       /   BA = √29 km（用于求 AC）
        B
铺管使用 DA 与 DB；BC 垂直于河岸。
```

读图时先用 AB 和 BC 求出 AC，再令 $CD=x$，分别算沿岸段 DA 和斜段 DB 的长度。

24-1 成本、收益与利润建模

什么时候用 题给成本、售价、收益、销量或产量

1. 选统一自变量。
2. 按所问列总利润、总成本或平均成本，并写约束。
3. 通过导数和可行点选最优。

用到的公式或定理 收益 $R=qp(q)$，利润 $P=R-C$，平均成本 $\overline{C}=C/q$（$q>0$）。

易错点 每件售价不是总收益，平均成本也不是边际成本。

对应真题 2016 年第 23 题、2014 年第 24 题、2012 年第 30 题。

24-2 几何、容量或铺设费用建模

什么时候用 题给周长、体积、实地距离或材料费用

1. 画需要的关系或列几何约束。
2. 用约束消去一个变量，定义域代回。
3. 建立成本、面积或体积表达式。

用到的公式或定理 常用 $V_{圆柱}=\pi r^2h$、勾股定理、$S_{侧}=2\pi rh$。

易错点 有盖和无盖用料不同，管线每段单价可能不同。

对应真题 2015 年第 24 题、2013 年第 30 题、2011 年第 30 题、2010 年第 30 题。

24-3 比较可行区间的驻点与边界

什么时候用 目标函数已是一元式，需要判全局最优

1. 找可行域、端点、驻点及不可导点。
2. 验证符号变化或比较值。
3. 有整数条件时查相邻整数并给实际单位。

用到的公式或定理 闭区间连续可用有限候选比较；开区间结合端点极限。

易错点 导数为零只给候选，也可能最优在边界。

对应真题 2016 年第 23 题、2015 年第 24 题、2014 年第 24 题、2013 年第 30 题。

24.2 核心概念与通俗解释

约束与可行域 可走的路先划出来，再在路内选最优位置。

由长度、体积、成本或实际限制决定变量能取哪些值。 解方程和比较端点均以可行域为准。

容易出错的地方：将负产量或超过原材料的尺寸代入。

目标函数 把“最省”或“最多”翻译成一个可以计算的量。

用同一变量表达要最大或最小的实际量。 按题目逐问各建模型。

容易出错的地方：混淆利润、收入和平均成本。

全局最优与整数检验 山坡最高点可能在边界，台阶只允许站在整格。

比较可行范围内所有候选，若可行量只取整数需检查连续最优点邻近的合法整数。 对两邻点及相关端点算利润或成本。

容易出错的地方：连续最优直接四舍五入而不比较。

24.3 真题归类总结

本章共 10 道真题。下列题目按解法排列。完整汇总表见附录一。

成本、收益与利润建模（24-1）

2016 年第 23 题 • 汇编第 39 页 销量、售价与成本给定时求最大利润

$p=420-q/2$，$C=30000+100q$，故 $P(q)=320q-q^2/2-30000$。在 $0\le q\le 840$，$P'=320-q$ 由正转负，所以 $q=320$ 件，售价 $p=260$ 元。 （配合 24-3）

易错点：收益是 pq、利润是收益减成本。

2014 年第 24 题 • 汇编第 52 页 由收益与成本求产量和最大利润

利润 $P=-2x^3+3x^2+12x-1$，$P'=-6(x-2)(x+1)$，在非负域先增后减。故最佳产量为 2，最大利润为 19。 （配合 24-3）

易错点：负的驻点不在产量范围。

2012 年第 30 题 • 汇编第 64 页 同一成本函数下求最低平均成本和最大利润

$C=25000+200x+x^2/40$。（1）平均成本 C/x 的导数为 $-25000/x^2+1/40$，得 $x=1000$。（2）定价 500，利润 $500x-C$ 的导数 $300-x/20$，得 $x=6000$。两处都由导数变号验证。 （配合 24-3）

易错点：两问优化的是不同目标。

几何、容量或铺设费用建模（24-2）

2015 年第 24 题 • 汇编第 45 页　从河岸水厂向两生活区铺管的最低成本

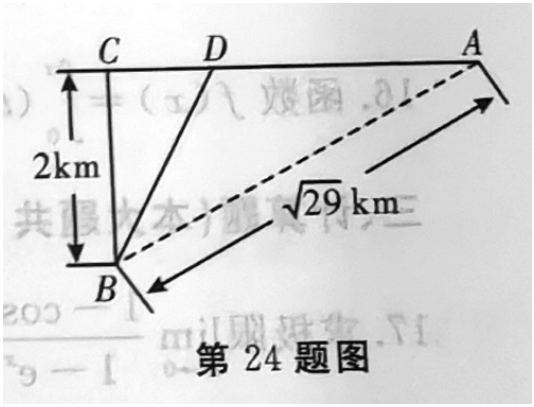

图 24-1　2015 年第 24 题试卷原图。先在岸上找到 C、D、A，再看通往 B 的斜段 DB；两段管线要分别按自己的单价计费。

图中 $BC=2$，$AB=\sqrt{29}$，所以 $AC=5$。令 $x=CD$，成本 $30(5-x)+50\sqrt{x^2+4}$（$0\le x\le 5$）。导数 $-30+50x/\sqrt{x^2+4}$ 递增，零点 $x=3/2$ 给最小值 230 万元。在河岸线段外移动会使两段长度同时增加。　（配合 24-3）

易错点：两段管的单价不同。

2013 年第 30 题 • 汇编第 58 页　定容量无盖圆柱杯，底面单位造价为侧壁两倍

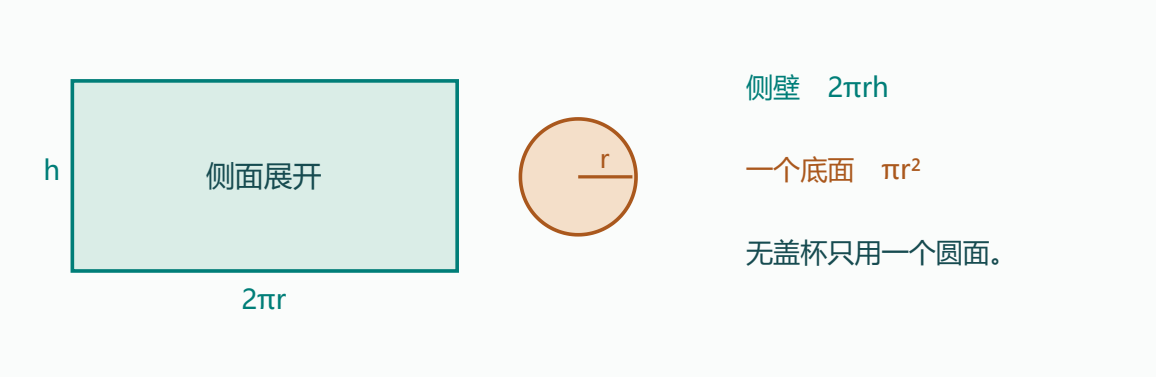

图 24-2　把无盖圆柱杯展开。矩形的长等于底面周长；本题底面单位造价是侧壁的两倍，列成本时要分别计价。

设半径 r、高 h，$r^2h=16$。以侧壁单位价为 1，总成本 $2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+32\pi/r$。导数唯一零点 $r=2$ 且由负变正，故 $h=4$。　（配合 24-3）

易错点：无盖，只计算一个底面。

2011 年第 30 题 • 汇编第 70 页　容积 2π 的密闭圆柱罐最省料

$r^2h=2$，总面积 $2\pi r^2+4\pi/r$。求导并检查变号得 $r=1,h=2$。　（配合 24-3）

易错点：封闭罐包含上下两个圆面。

2010 年第 30 题 • 汇编第 76 页　底边比 $1:2$、体积 72 的带盖长方体最小表面积

令宽 x、长 $2x$，高 $36/x^2$。表面积 $S=4x^2+216/x$；$S'=8x-216/x^2$ 由负转正处 $x=3$，所以长、宽、高依次为 $6,3,4$ cm。　（配合 24-3）

易错点：上下底都要计入。

2009 年第 29 题 • 汇编第 81 页　铁丝分围正方形和圆，总面积最小

令正方形用长 x，圆用 $a-x$。总面积 $x^2/16+(a-x)^2/(4\pi)$；严格凸，解 $x/8-(a-x)/(2\pi)=0$ 得 $x=4a/(4+\pi)$，另一段为 $\pi a/(4+\pi)$。　（配合 24-3）

易错点：使用的是周长，先化成边长或半径。

2008 年第 30 题 • 汇编第 88 页　靠墙围长方形，三面砖墙共 20 米

两短边各 x，沿墙对面长 $20-2x$，面积 $x(20-2x)$。在 $0\le x\le 10$ 的最大值位于 $x=5$，所以长 10、宽 5 米，面积 50 平方米。　（配合 24-3）

易错点：靠墙一侧不耗砖。

2007 年第 30 题 • 汇编第 94 页　正方形铁皮剪同样的角后折无盖盒

剪角边长 x，$0<x<a/2$，体积 $x(a-2x)^2$。$V'=(a-2x)(a-6x)$，峰值在 $x=a/6$，边界极限为零，最大容量 $2a^3/27$。　（配合 24-3）

易错点：折起高度是剪角边长，底边两侧都被剪去。

24.4 反套路延伸题

延伸题 1　剪角尺寸受上限限制

用边长 a 的正方形铁皮剪去同样的四角后折出无盖盒，设备要求剪角边长 $0 < x \le a/8$。求最大体积。

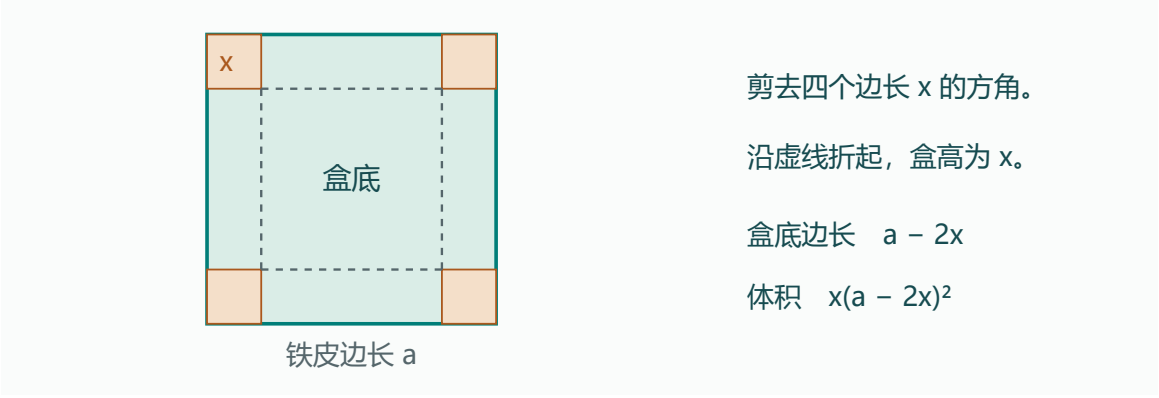

图 24-3　从剪角展开图读出盒底和盒高。沿一条边从两头各减去 x，余下的是盒底边长；折起的侧边给出盒高。

解题线索　仍用体积 $x(a-2x)^2$，但可行区间改变。

反套路点　常见无约束驻点在 $a/6$，这次超过设备允许范围。

解析　$V' = (a-2x)(a-6x)$，在允许区间两因子都正，故全段递增。最大值在 $a/8$，代入得 $(a/8)(3a/4)^2$。

答案　剪角 $a/8$，最大体积 $9a^3/128$。

对应方法　24-2、24-3。

基于公开真题风格的推测　2007 年第 30 题按剪角长度建体积模型，2015 年第 24 题结合几何确定可行区间。

延伸题 2　整数产量有两个并列最优

产品单价为 10，成本 $C(q) = q^2 + 3q + 5$，产量 q 是非负整数。求最大利润及所有最优产量。

解题线索　先写 $P = 10q - C(q)$，再配方。

反套路点　连续最大点为半整数，两边相邻整数都要检验。

解析　$P = -q^2 + 7q - 5 = 29/4 - (q - 7/2)^2$。离 $7/2$ 最近的非负整数是 $3, 4$，两者距离均为 $1/2$，其余更远。

答案　产量 3 或 4 件，最大利润 7。

对应方法　24-1、24-3。

基于公开真题风格的推测　2016 年第 23 题用售价与成本建利润式，2014 年第 24 题同时问最优产量与利润。本题显式加入整数限制。

附录一　题型清单与真题对照

题型按知识点和解题路径合并，选择、填空、计算、应用和证明共用这套题型。下表列出全部主归类出处。比如 `2022/3·19` 表示 2022 年第 3 册页第 19 题。方法数对应下方分章正文的方法分支。

题型	真题出处（年份 / 册页•题号）	数量与说明
01　函数的定义域、值域、复合与同一性	2022/1·1，2·11；2021/6·15；2020/12·11；2019/18·11；2018/24·11；2016/35·1，36·11；2015/41·1；2014/47·1，48·11；2013/53·1，54·11；2012/59·1，60·11；2011/65·1，66·11；2010/71·2；2009/77·1；2008/83·2；2007/89·1、2；2006/96·11	23 题 · 4 种方法 复合、值域与定义域统一放在函数表达式这一章。
02　函数性质与反函数	2021/5·3；2020/11·1；2019/17·1、2；2018/23·1；2017/29·1；2016/35·2；2011/65·2；2010/71·1，72·11；2008/83·1，84·11；2007/89·5，90·11；2006/95·1	15 题 · 4 种方法 包含有界性、奇偶性、周期性及反函数。
03　无穷小量及其阶的比较	2022/1·2；2021/5·2；2020/11·2；2019/17·4；2018/24·12；2017/29·3；2016/35·3；2015/41·2；2014/47·2；2013/53·3；2012/59·2；2011/65·3；2009/77·2；2007/89·3	14 题 · 3 种方法 题目直接问无穷小或阶数时归入此章。
04　极限的计算与存在性	2022/1·3，2·12、17；2021/5·4，6·12，7·18；2020/11·3，12·12，13·17；2019/17·3，18·12、17；2018/23·2、4，24·17；2017/29·2，30·17；2016/35·5，37·17；2015/41·3，42·12、17；2014/47·3，48·12、17；2013/53·2，54·12、21；2012/60·12、21；2011/66·12、13；2010/72·12；2009/78·11、12；2008/83·6，84·12、21；2007/90·12；2006/95·2，96·12，97·21	42 题 · 6 种方法 包含数列极限、无穷远极限和 1^{∞} 型。
05　连续性、间断点与分段参数	2022/1·4，3·18；2021/5·1，9·21；2020/13·18；2019/19·18；2018/23·3；2017/30·11、12；2016/35·4，36·12；2015/42·11，43·18；2014/49·18；2013/53·4，55·22；2011/65·4，67·21；2010/72·21；2009/77·3，79·22；2008/83·3，84·13；2007/90·13，93·28；2006/95·3	26 题 · 3 种方法 包括连续区间、可去、跳跃、无穷及振荡间断。
06　导数定义、分段点可导性与关系判断	2022/1·5；2021/6·7；2016/40·25；2015/46·25；2014/48·10；2013/53·5，54·13；2012/59·3、4，61·22；2011/65·5；2010/71·3，72·14；2009/77·4、5；2008/83·5；2007/89·4；2006/95·6	18 题 · 3 种方法 包含存在性、充分必要关系与含参数的分段点。
07　显函数求导、高阶导数与微分	2022/1·6；2021/5·5，6·14；2020/11·5，12·6、13、14；2019/17·5，18·13；2017/31·19；2016/35·6；2015/41·4；2014/47·5；2013/53·6，55·23；2012/60·13、14；2011/65·6，67·23；2010/71·4；2009/77·6，78·13、14；2008/83·4，84·14、15；2007/91·22；2006/95·5，96·13、14，97·22	31 题 · 5 种方法 包含对数求导、逐次求导与微分。

题型	真题出处（年份 / 册页·题号）	数量与说明
08　隐函数与参数方程求导	2022/3·19；2021/7·17；2020/14·19；2018/25·18；2016/37·19；2015/43·19；2014/48·13；2013/55·24；2012/61·23、24；2011/68·24；2010/73·23、24；2009/79·23、24；2008/85·22、23；2007/90·14；2006/97·23	19 题 · 4 种方法 含一阶、二阶与导数比值的分母为零等情形。
09　曲线切线与法线	2022/2·13；2019/19·19；2017/31·18；2015/42·13；2014/50·20；2013/54·14；2012/60·15；2011/66·14；2010/72·13；2009/78·15；2008/84·16；2007/90·17；2006/95·4	13 题 · 3 种方法 曲线题在此章，空间直线与平面见题型 19。
10　单调性、极值与区间最值	2021/6·13；2020/11·4；2018/23·5、6，24·13、14；2017/29·6；2014/48·16；2012/59·6；2011/66·15；2010/71·5；2009/77·8；2008/85·24；2007/91·23；2006/96·15，98·24，100·30	17 题 · 5 种方法 包含由变上限积分给出的函数最值，相关求导见题型 16。
11　曲线凹凸性与拐点	2022/2·8；2021/6·6；2020/12·7；2019/18·7；2017/30·13；2016/35·7，38·21；2015/41·5；2014/47·4；2013/54·15；2012/60·16；2011/66·7；2010/72·16；2009/78·17；2008/83·7，84·17；2006/96·7	17 题 · 4 种方法 含图像判断及拐点反求参数。
12　中值定理与不等式证明	2017/29·5，30·10；2015/41·6；2014/47·6；2013/54·16，58·31；2012/59·5；2011/70·31；2010/72·15，76·31；2009/78·16；2008/88·31；2007/90·6，94·31；2006/100·31	15 题 · 4 种方法 包含罗尔、拉格朗日和不等式证明。
13　方程实根、交点个数与参数范围	2022/4·24；2021/10·24；2020/16·24；2019/22·24；2018/27·23；2017/29·4，34·24；2015/42·10；2014/52·25；2012/64·31；2009/82·31	11 题 · 4 种方法 包括零点存在性、唯一性、根附近符号及交点计数。
14　原函数与不定积分	2022/1·7，3·20；2021/6·8、11；2020/12·8，14·20；2019/17·6，18·15，20·20；2018/23·7，24·15，25·19；2017/29·7；2015/41·7；2014/47·7；2013/53·7，56·25；2012/60·17，62·25；2011/66·8，68·25；2010/71·6，72·17，74·25；2009/77·7，80·25；2008/86·25；2007/90·7，92·24；2006/96·8、16，98·25	32 题 · 4 种方法 原函数识别、由原函数反推被积函数及换元同章。
15　定积分性质与计算	2022/2·14、15；2021/8·20；2020/12·15；2019/18·8；2018/26·20；2017/30·15，32·20；2016/36·8、14，38·20；2015/42·14，43·20；2014/48·14，49·19；2013/54·18，56·26；2012/60·18，62·26；2011/66·16、18，68·26；2010/72·18，74·26；2009/78·18，80·26；2008/84·9、18，86·26；2007/90·15、18，92·26；2006/96·9、19，98·26	35 题 · 5 种方法 含奇偶对称、分段、绝对值和有向面积。
16　变上限积分及其求导	2019/18·14；2018/24·8；2017/30·14；2015/42·16；2013/54·17；2012/59·7；2011/67·22；2010/71·7，73·22；2009/78·21；2008/83·8；2007/90·8，91·21；2006/96·17	14 题 · 4 种方法 含变上限积分极限、分段被积函数，以及固定上下限作对照。

题型	真题出处（年份 / 册页·题号）	数量与说明
17　广义积分的计算与敛散判定	2016/36·15；2015/42·15；2014/48·15；2013/53·8；2012/59·8；2011/66·17；2010/71·8；2007/90·19	8 题 · 2 种方法 涵盖无穷区间和积分端点出现瑕点。
18　空间点坐标与向量运算	2022/2·9；2021/6·10；2019/18·9；2018/24·9；2017/30·16；2016/36·9；2015/42·8；2014/48·8；2013/53·9；2012/60·10；2011/66·9、20；2010/72·20；2009/77·9，78·19；2008/84·19；2007/90·16	17 题 · 5 种方法 包含坐标对称、向量模、夹角、点积与叉积。
19　空间直线、平面及位置关系	2022/3·21；2021/8·19；2020/12·9，15·21；2019/20·21；2018/24·16，26·21；2017/30·8，32·21；2016/36·16，37·18；2015/44·21；2014/50·21；2013/54·19，56·27；2012/60·20，62·27；2011/69·28；2010/71·9，75·28；2009/80·27；2008/87·28；2007/90·9，93·27；2006/96·18，99·28	26 题 · 5 种方法 含点到平面距离、直线到平面的投影。
20　微分方程的阶数与类型识别	2020/12·16；2018/24·10；2011/66·10；2010/72·10；2009/78·10；2007/90·10	6 题 · 2 种方法 题目只要求辨认阶数或类型时归入此章。
21　一阶微分方程的通解与特解	2022/2·16，4·22；2021/6·16，9·22；2020/15·22；2019/18·16，21·22；2018/27·22；2017/33·22；2016/36·13，38·22；2015/44·22；2014/51·22；2013/54·20，57·28；2012/60·19，63·28；2011/66·19，69·27；2010/72·19，74·27；2009/81·28；2008/84·20，86·27；2007/92·25；2006/96·20，99·27	27 题 · 3 种方法 含用已知切线斜率和过点条件反求曲线。
22　高阶微分方程的通解与特解形式	2022/2·10；2021/6·9；2020/12·10；2019/18·10；2017/30·9；2016/36·10；2015/42·9；2014/48·9；2013/54·10；2012/59·9；2009/78·20；2008/84·10；2007/90·20；2006/96·10	14 题 · 4 种方法 含直接积分、齐次通解、候选解验证及非齐次特解形式。
23　定积分应用：面积、旋转体体积与质量	2022/4·23；2021/10·23；2020/16·23；2019/21·23；2018/28·24；2017/33·23；2016/39·24；2015/45·23；2014/51·23；2013/57·29；2012/63·29；2011/69·29；2010/75·29；2009/82·30；2008/87·29；2007/93·29；2006/99·29	17 题 · 3 种方法 涵盖绕 x 轴与绕 y 轴，薄片质量见 2007 年第 29 题。
24　实际情境的最优化	2016/39·23；2015/45·24；2014/52·24；2013/58·30；2012/64·30；2011/70·30；2010/76·30；2009/81·29；2008/88·30；2007/94·30	10 题 · 3 种方法 包含成本、利润、铺设路线及几何尺寸优化。

综合题交叉索引示例

出处	主归类	关联题型
2022/4·24	13 方程实根与交点	（1）10 单调、极值；（2）11 凹凸；（3）13 交点数

出处	主归类	关联题型
2021/7·17	08 隐函数与参数求导	（1）08 求导；（2）09 切线
2021/10·24	13 方程实根与交点	（1）04 极限；（2）10 单调；（3）13 根数
2020/14·19	08 隐函数与参数求导	（1）代参数求点；（2）08 对参数求导；（3）09 切线
2018/25·18	08 隐函数与参数求导	（1）08 隐函数求导；（2）09 切线
2018/26·20、21	15 定积分、19 直线与平面	第 20 题（1）关联 07 微分；第 21 题（1）关联 18 向量
2018/27·23	13 方程实根与交点	（1）关联 01 定义域、10 单调、11 凹凸；（2）13 交点数
2014/48·16、2011/66·15、2006/100·30	10 单调、极值与最值	16 变上限积分求导
2012/64·31	13 方程实根与交点	16 变上限积分求导
2006/99·29	23 定积分应用	（1）09 切线；（2）（3）23 面积、体积

已合并解析的同题

可共用一份解析的数学任务	出处
已知原函数为 xe^x 加常数，再求 $\int f(2x)\,dx$。选项顺序有变化。	2021/6·8、2017/29·7
计算 $\lim_{x\to\infty}(1-2/x)^x$。	2019/18·12、2014/48·12
计算 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$。题面呈现形式有变化。	2014/48·15、2012/59·8、2007/90·19
计算 $\int_0^1 xe^x\,dx$。	2016/38·20、2007/92·26
计算 $\lim_{x\to0}[1/x-1/(e^x-1)]$。	2012/60·21、2009/78·12
判断连续是可导的什么条件。	2009/77·4、2008/83·5
由闭区间连续及内部导数正，比较端点函数值。	2018/23·5、2009/77·8

这 7 组在正文共用解析并保留全部出处。467 是题面出现次数。按当前识别的同题关系合并后，有 459 条独立解析条目，其中个别题面的数值细节待确认。

01　函数的定义域、值域、复合与同一性

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 1 第 1 题 01-1	对数与分母根式的定义域 定义域、端点	令 $x+3>0$、$2-x>0$，交集为 $(-3,2)$。 易错点　分母的根号内不能取零。
2022 年 册页 2 第 11 题 01-3	$f(x)=\sqrt{1+x}$ 的二次复合 复合、合法输入	内层 $f(0)=1$，外层 $f(1)=\sqrt{2}$。 易错点　复合仍要检查外层定义域。
2021 年 册页 6 第 15 题 01-2	$\lvert x\rvert+x$ 的值域 分段、值域	$x<0$ 时值为零，$x\geq 0$ 时为 $2x$，值域是 $[0,+\infty)$。 易错点　零能取到。
2020 年 册页 12 第 11 题 01-1	$\ln\sqrt{4-x^2}$ 的定义域 定义域、端点	对数真数必须为正，故 $4-x^2>0$，得 $(-2,2)$。 易错点　根号和对数条件要同时满足。
2019 年 册页 18 第 11 题 01-1	$\sqrt{x}/\ln x$ 的定义域 定义域、端点	由 $x\geq 0$、$x>0$ 和 $\ln x\neq 0$ 得 $(0,1)\cup(1,+\infty)$。 易错点　排除对数分母的零点 $x=1$。
2018 年 册页 24 第 11 题 01-3	$f(x)=\ln x$ 时求 $f(f(e))$ 复合、合法输入	$f(e)=1$，$f(1)=0$。 易错点　函数值为零合法，零作为对数自变量才不合法。
2016 年 册页 35 第 1 题 01-1	$1/\sqrt{x-1}+\ln(2-x)$ 的定义域 定义域、端点	要求 $x-1>0$ 且 $2-x>0$，所以 $1<x<2$。 易错点　两端均开。
2016 年 册页 36 第 11 题 01-3	$f(x)=\sin x$，$g(x)=2+x^2$，求 $g(f(x))$ 复合、合法输入	用 $\sin x$ 替换外层的自变量，得 $2+\sin^2 x$。 易错点　内外顺序不可交换。
2015 年 册页 41 第 1 题 01-3	分段函数的复合 $f(f(2))$ 复合、合法输入	$x=2$ 属于右支，$f(2)=1$。 易错点　等号要放进题设指定的一支。
2014 年 册页 47 第 1 题 01-4	四组函数中找同一函数 同一函数、定义域	逐组比定义域与逐点值。$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 两边均定义于 $\mathbb{R}$； 易错点　约分和开平方可能改变原定义域或符号。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2014 年 册页 48 第 11 题 01-1	$\sqrt{2-x}+\ln(x-1)$ 的定义域 定义域、端点	求交集 $\{x\le 2\}\cap\{x>1\}=(1,2]$。 易错点　根号的端点可取，对数的端点不可取。
2013 年 册页 53 第 1 题 01-1	有理项与 $\sqrt{4-x^2}$ 的定义域 定义域、端点	先用 $4-x^2\ge 0$ 得 $[-2,2]$，再去掉有理项分母为零的 $x=2$，得 $[-2,2)$。 易错点　分别检查两端。
2013 年 册页 54 第 11 题 01-3	由 $f(x+2)=x(x+2)$ 求 $f(x-2)$ 复合、合法输入	令 $u=x+2$，则 $f(u)=u(u-2)$。 易错点　外层变量替换后原式右边也要同步改。
2012 年 册页 59 第 1 题 01-1	$\arccos(x-4)$ 的定义域 定义域、端点	$-1\le x-4\le 1$，故为 $[3,5]$。 易错点　用的是反余弦的输入范围。
2012 年 册页 60 第 11 题 01-3	分段函数求 $f(x-1)$ 复合、合法输入	分界从原输入 0 平移到 $x=1$。 易错点　分段条件也要替换。
2011 年 册页 65 第 1 题 01-4	$\sqrt{(x-1)/(x-2)}$ 与 $\sqrt{x-1}/\sqrt{x-2}$ 的共同定义 同一函数、定义域	右式要求 $x>2$。在此范围左式合法且根式商可拆，因此选 $(2,+\infty)$。 易错点　根式商可以定义在两个分根式都无定义的地方。
2011 年 册页 66 第 11 题 01-3	$f(x)=x/(x-1)$ 的嵌套复合 复合、合法输入	先算 $1/(f(x)-1)=x-1$，再算 $f(x-1)=(x-1)/(x-2)$。 易错点　化简后仍保留 $x\ne 1$。
2010 年 册页 71 第 2 题 01-4	$\sqrt{x^2}$ 与 x 的相同范围 同一函数、定义域	$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$，两式在 $x\ge 0$ 逐点相同； 易错点　含零。
2009 年 册页 77 第 1 题 01-4	四组中识别相同函数 同一函数、定义域	$\sqrt[3]{x^4-x^3}=\sqrt[3]{x^3(x-1)}=x\sqrt[3]{x-1}$，两边定义域均为实数。 易错点　实立方根可以处理负值。
2008 年 册页 83 第 2 题 01-1	从选项找定义域 $[-1,1)$ 的函数 定义域、端点	对 $\sqrt{(1+x)/(1-x)}$ 解根号内非负并排除 1，得所需区间。 易错点　分式不等式要分段看符号。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2007 年 册页 89 第 1 题 01-1	$2\ln(1+2x)$ 的定义域 定义域、端点	$1+2x>0$，得 $(-\frac{1}{2},+\infty)$。 易错点　对数外乘常数不改变定义域。
2007 年 册页 89 第 2 题 01-3	三段函数与 $g(x)=e^x$ 作复合 复合、合法输入	先取 $f(x)$ 的三个输出 $1,0,-1$，代进 g 得 $e,1,e^{-1}$，对应 $\lvert x\rvert<1,=1,>1$。 易错点　边界单独一支，$f(g(x))$ 的分界由 e^x 决定。
2006 年 册页 96 第 11 题 01-3	由 $f(1/x)=x/(x+1)$ 求 $f(2x)$ 复合、合法输入	令 $u=1/x$ 得 $f(u)=1/(1+u)$（原等式确定 $u\neq 0,-1$）。 易错点　若题面未补定义，原式无法单独确定 $f(0)$。

02　函数性质与反函数

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2021 年 册页 5 第 3 题 02-3	$\sin x$ 在哪个区间有反函数 单射、限制支	在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 严格递增，每个输出只对应一个输入； 易错点　周期函数可在合适的限制区间可逆。
2020 年 册页 11 第 1 题 02-4	选择互为反函数的一对 反函数、定义域和值域	解 $y=x^3$ 得 $x=\sqrt[3]{y}$，两者都覆盖实数域，互相复合回原变量。 易错点　反函数不是倒数。
2019 年 册页 17 第 1 题 02-4	$y=(x-1)/2$ 的反函数 反函数、定义域和值域	从 $y=(x-1)/2$ 解出 $x=2y+1$，互换命名得 $2x+1$。 易错点　平移常数的符号。
2019 年 册页 17 第 2 题 02-1	$\cos x$ 缺少哪种题列性质 有界、周期或单调	由 $\lvert\cos x\rvert\le 1$、$\cos(-x)=\cos x$ 和周期 2π，保留有界、偶和周期性； 易错点　区别全域与单个单调区间。
2018 年 册页 23 第 1 题 02-4	由原函数的定义域、值域求反函数定义域 反函数、定义域和值域	反函数接收原函数的输出。题面原值域 $[1,2)$ 即所求。 易错点　开放端点随值域一起保留。
2017 年 册页 29 第 1 题 02-4	求 $f^{-1}(3)$ 反函数、定义域和值域	其含义为在 $x>1$ 解 $2x/(x-1)=3$，得 $x=3$。 易错点　核对解属于限制支。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2016 年 册页 35 第 2 题 02-4	函数与反函数图像的对称关系 反函数、定义域和值域	点 (a,b) 对应 (b,a)，中点在 $y=x$ 且连线与之垂直，故关于 $y=x$ 对称。 易错点　不等同于奇偶性。
2011 年 册页 65 第 2 题 02-1	指数函数在 $(-1,1)$ 上的有界与单调性 有界、周期或单调	指数 $2x+1$ 随 x 增，且在 $(-1,3)$ 内，故函数有界且严格递增。 易错点　定义域是题给区间。
2010 年 册页 71 第 1 题 02-1	$\sin(x+1)/(1+x^2)$ 的性质 有界、周期或单调	分子绝对值不超过 1、分母至少为 1，所以有界。 易错点　被平移的正弦不能直接沿用原奇偶性。
2010 年 册页 72 第 11 题 02-4	$2+\ln(x+1)$ 的反函数 反函数、定义域和值域	解 $y-2=\ln(x+1)$ 得 $x=e^{y-2}-1$，故反函数为 $e^{x-2}-1$，定义于全实数。 易错点　指数中的平移为减 2。
2008 年 册页 83 第 1 题 主 02-2；配合或备用 02-1	限制在 $[-1,2]$ 的 $2x^2+e^{x^2}$ 奇偶、对称域	定义域不关于零对称，排除奇偶； 易错点　表达式偶对称和受限函数的奇偶性要区分。
2008 年 册页 84 第 11 题 02-4	由 $f(1/x)=x/(x+1)$ 求反函数 反函数、定义域和值域	令 $u=1/x$ 得 $f(u)=1/(1+u)$。 易错点　未经补充不能从原式推定 $u=0$ 处的定义。
2007 年 册页 89 第 5 题 02-2	三个奇函数的组合 奇偶、对称域	令 $h(x)=f(x)[g(x)+\varphi(x)]$，因子同时变号，故 h 为偶函数。 易错点　奇乘奇为偶，奇加奇为奇。
2007 年 册页 90 第 11 题 02-4	$f(x)=(1-x)/(1+x)$ 的反函数复合 反函数、定义域和值域	解 $y=(1-x)/(1+x)$ 发觉 $f^{-1}=f$。 易错点　内层有定义还须落入反函数定义域。
2006 年 册页 95 第 1 题 02-2	对任意 f 识别必为奇函数的构造 奇偶、对称域	$xf(x^2)$ 在换 $x\mapsto -x$ 后外因子变号，内参 x^2 不变，故为奇函数。 易错点　“必为”要求任意允许的 f。

03　无穷小量及其阶的比较

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 1 第 2 题 03-1	$x \to 0$ 时的无穷小识别 无穷小、有界因子	$\lvert x\sin(1/x)\rvert \le \lvert x\rvert$，所以该项趋零； 易错点　有界乘趋零可趋零，振荡项本身未必有极限。
2021 年 册页 5 第 2 题 主 03-2；配合或备用 03-3	比较 $1-\cos x$ 与 $\sin(x^2)$ 高低阶、比值	两者主项是 $x^2/2$ 与 x^2，比值趋 $1/2$，同阶但不等价。 易错点　$\sin(x^2)$ 与 $(\sin x)^2$ 应按原记号识别。
2020 年 册页 11 第 2 题 03-1	判断 $x \to 0$ 的无穷小 无穷小、有界因子	在题列四项中，$x\sin x \to 0$； 易错点　小量要按指定过程判断。
2019 年 册页 17 第 4 题 03-3	找与 x 等价的量 等价无穷小、首项	$\tan x/x \to 1$。 易错点　不能丢掉首项符号。
2018 年 册页 24 第 12 题 03-1	求使 $1/(x-1)$ 成为无穷小的趋向过程 无穷小、有界因子	有限点处若有极限则不为零，趋于正无穷或负无穷时都趋零。 易错点　区分题目所需的单个例子与所有可行趋向。
2017 年 册页 29 第 3 题 03-3	已知 $f(x)\sim 2/x$ 求 $\lim_{x\to\infty} xf(x)$ 等价无穷小、首项	写成 $xf(x)=2\,[f(x)/(2/x)]$，故极限等于 2。 易错点　等价是在 $x\to\infty$ 时成立。
2016 年 册页 35 第 3 题 03-1	$x \to 0$ 的无穷小选项 无穷小、有界因子	$x^2 \to 0$；$x+2$、$(x+1)^2$ 和 2^x 均趋非零常数。 易错点　代入前检查表达式的连续性。
2015 年 册页 41 第 2 题 主 03-2；配合或备用 03-3	比较 $\tan 2x$ 与 x 高低阶、比值	$\tan 2x/x \to 2$，同阶非等价。 易错点　同阶的比值可不等于 1。
2014 年 册页 47 第 2 题 03-3	选择与 x 等价的量 等价无穷小、首项	$\tan x$ 的首项是 x； 易错点　$2^x-1\sim(\ln 2)x$。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2013 年 册页 53 第 3 题 主 03-2；配合或备用 03-3	比较 $1-\cos x$ 与 $\tan x$ 高低阶、比值	比值等价于 $(x^2/2)/x = x/2 \to 0$，所以前者高阶。 易错点　分清谁作分子。
2012 年 册页 59 第 2 题 主 03-2；配合或备用 03-3	比较 $x-\sin x$ 与 x 高低阶、比值	比值 $1-\sin x/x \to 0$，前者高阶。 易错点　在差式中直接换成两个等价主项会丢失高阶信息。
2011 年 册页 65 第 3 题 主 03-2；配合或备用 03-3	比较 $2^{x^2}-1$ 与 $(\arctan x)^2$ 高低阶、比值	两者分别等价于 $(\ln 2)x^2$ 与 x^2，比值为 $\ln 2$，同阶非等价。 易错点　指数的底数带来系数 $\ln 2$。
2009 年 册页 77 第 2 题 03-3	四组选等价无穷小 等价无穷小、首项	$\sin x/x \to 1$，其余组的比值趋零或非 1 的常数。 易错点　同阶并不自动等价。
2007 年 册页 89 第 3 题 03-3	找与 x^2 等价的量 等价无穷小、首项	$(e^x-1)\sin x \sim x\cdot x = x^2$，根式差的首项是 $x^2/2$。 易错点　乘积可拆用等价，系数仍需保留。

04　极限的计算与存在性

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 1 第 3 题 04-2	有理函数在无穷远的极限 通分、有理化或主项	分子分母同除以 x^2，余下首项比为 $2/4 = 1/2$。 易错点　先比次数再比系数。
2022 年 册页 2 第 12 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to\infty}(1-5/x)^{2x}$ 两个重要极限、等价替换	取对数，$2x\ln(1-5/x) \to -10$，故得 e^{-10}。 易错点　指数的因子 2 不能漏。
2022 年 册页 2 第 17 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to 0}\ln(1+2x^2)/(x\sin x)$ 两个重要极限、等价替换	分子等价于 $2x^2$、分母等价于 x^2，故得 2。 易错点　等价关系用在乘除整体。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2021 年 册页 5 第 4 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to 0}(1-6x)^{1/(2x)}$ 两个重要极限、等价替换	取对数，$\ln(1-6x)/(2x)\to -3$，结果为 e^{-3}。 易错点　核对底数在邻域内为正。
2021 年 册页 6 第 12 题 04-4	有界的 $\sin x$ 乘有理量 夹逼、有界乘小量	$\lvert(x^3+1)\sin x/x^5\rvert\le\lvert(x^3+1)/x^5\rvert\to 0$。 易错点　不要给 $\sin x$ 单独指定无穷远极限。
2021 年 册页 7 第 18 题 主 04-2；配合或备用 04-3	$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x^2}-1)/x^2$ 通分、有理化或主项	用共轭分子有理化，化成 $1/(\sqrt{1+x^2}+1)$，得 $1/2$。 易错点　约掉 x^2 只在去心邻域操作。
2020 年 册页 11 第 3 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to 0}(e^{2x}-1)/x$ 两个重要极限、等价替换	乘除 $2x$ 或用 $e^{2x}-1\sim 2x$，得 2。 易错点　保留内层倍数。
2020 年 册页 12 第 12 题 主 04-3；配合或备用 04-5	由 $\lim(1+1/x)^{kx}=e^2$ 反求 k 两个重要极限、等价替换	把对数极限化为 $kx\ln(1+1/x)\to k$，比较指数，得 $k=2$。 易错点　不同指数给出不同的正实数。
2020 年 册页 13 第 17 题 04-2	分子分母同为三次的有理极限 通分、有理化或主项	分子分母同除以 x^3，最高次项系数相同，极限为 1。 易错点　只保留主项须在无穷远过程。
2019 年 册页 17 第 3 题 主 04-4；配合或备用 04-3	四项判断基本极限 夹逼、有界乘小量	正确项是 $x\sin(1/x)\to 0$，由绝对值不超过 $\lvert x\rvert$ 得出。 易错点　区分 $\sin x/x$ 在零点和无穷远的不同极限。
2019 年 册页 18 第 12 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to\infty}(1-2/x)^x$ 两个重要极限、等价替换	对数为 $x\ln(1-2/x)\to -2$，指数还原得 e^{-2}。 易错点　留意负系数。
2019 年 册页 18 第 17 题 04-5	$\lim_{x\to 0}(e^x-x^2-x-1)/[x(e^x-1)]$ 未定式、洛必达	分子分母均趋零。两次求导后极限为 $(1-2)/(2+0)=-1/2$，故原极限相同。 易错点　减法中的一阶主项抵消。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2018 年 册页 23 第 2 题 04-1	已知 $\lim f=2,\lim g=1$ 求 $\lim(f+g)^2$ 极限运算、连续复合	先用和的极限得 3，再用平方的连续性得 9。 易错点　括号作用于整个和。
2018 年 册页 23 第 4 题 主 04-3；配合或备用 04-4	基本极限选项辨析 两个重要极限、等价替换	核对趋向点，$\lim_{x\to0}\sin x/x=1$。 易错点　形式相似也要检查自变量的趋向。
2018 年 册页 24 第 17 题 主 04-5；配合或备用 04-3	$\lim_{x\to0}(x-\sin x)/x^2$ 未定式、洛必达	洛必达化成 $(1-\cos x)/(2x)$，再用 $1-\cos x\sim x^2/2$，得 0。 易错点　不能在未经变形的差式内直接把 $\sin x$ 换为 x。
2017 年 册页 29 第 2 题 主 04-3；配合或备用 04-4	选择正确的数列极限 两个重要极限、等价替换	$1/2^n\to0$。$(1+1/n)^2\to1$，$\sin n/n\to0$，且 $n/e^n\to0$。 易错点　正弦分母随 n 增大。
2017 年 册页 30 第 17 题 04-2	$\lim_{x\to1}(1/(x-1)-2/(x^2-1))$ 通分、有理化或主项	通分得 $(x+1-2)/[(x-1)(x+1)]=1/(x+1)$，结果 $1/2$。 易错点　无穷之差先化为整体。
2016 年 册页 35 第 5 题 04-3	辨析指数和正弦的基本极限 两个重要极限、等价替换	$\lim_{x\to0}\sin x/x=1$。 易错点　不能把不符条件的底数直接套 e。
2016 年 册页 37 第 17 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to0}(1-\cos x)/(3x^2)$ 两个重要极限、等价替换	用 $1-\cos x\sim x^2/2$，得 $1/6$。 易错点　保留分母系数 3。
2015 年 册页 41 第 3 题 04-3	四个指数极限选正确者 两个重要极限、等价替换	$\lim_{x\to\infty}(1+2/x)^x=e^2$，对数趋 2； 易错点　先核对趋向点与底数范围。
2015 年 册页 42 第 12 题 主 04-3；配合或备用 04-2	$\lim_{x\to1}\sin(x-1)/(x^2-1)$ 两个重要极限、等价替换	分解为 $\sin(x-1)/(x-1)\cdot1/(x+1)$，得 $1/2$。 易错点　正弦小量是 $x-1$。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2015 年 册页 42 第 17 题 主 04-2；配合或备用 04-3	$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/(1-\sqrt{1+2x})$ 通分、有理化或主项	分母乘共轭后为 $-2x/(1+\sqrt{1+2x})\sim -x$，分子二阶，得 0。 易错点　分母首项带负号。
2014 年 册页 47 第 3 题 主 04-3；配合或备用 04-4	辨别多个正弦极限 两个重要极限、等价替换	$\lim_{x\to\infty} x\sin(1/x)=1$，因为换元 $u=1/x$ 后为 $\sin u/u$。 易错点　另一种 $x\to 0$ 的同形表达式由夹逼得零。
2014 年 册页 48 第 12 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to\infty}(1-2/x)^x$ 两个重要极限、等价替换	①找共同小变量。②改写出标准极限或乘除结构。③检查主项系数再代回。 易错点　识别幂的底数趋 1。
2014 年 册页 48 第 17 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/(1-e^x)$ 两个重要极限、等价替换	主项分别为 $x^2/2$ 与 $-x$，故极限为 0。 易错点　二者虽都趋零，但阶数不同。
2013 年 册页 53 第 2 题 04-6	在一点有定义与极限存在的条件关系 左右极限、存在性	以 $f(x)=\sin(1/x)$ 并赋 $f(0)=0$ 反驳充分性； 易错点　极限观察去心邻域。
2013 年 册页 54 第 12 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to\infty}(1-2/(3x))^{3x}$ 两个重要极限、等价替换	令 $u=3x$，还原为 $(1-2/u)^u$，极限为 e^{-2}。 易错点　内外都按同一新变量改写。
2013 年 册页 54 第 21 题 主 04-2；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to 0}(1/x^2-\sin x/x^3)$ 通分、有理化或主项	通分为 $(x-\sin x)/x^3$，洛必达一次得 $(1-\cos x)/(3x^2)$，再用 $1-\cos x\sim x^2/2$ 得 $1/6$。 易错点　不能分别求两个发散项再相减。
2012 年 册页 60 第 12 题 04-3	$\lim_{x\to 0}\sin(kx)/x=3$ 两个重要极限、等价替换	对 $k\neq 0$ 用 $\sin(kx)/(kx)\to 1$，极限为 k； 易错点　除以 k 之前要检查 $k=0$。
2012 年 册页 60 第 21 题 主 04-2；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to 0}(1/x-1/(e^x-1))$ 通分、有理化或主项	通分成 $(e^x-1-x)/(x(e^x-1))$。 易错点　一次等价替换会丢掉首个非零项。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2011 年 册页 66 第 12 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to 0}(1-2\tan x)^{3\cot x}$ 两个重要极限、等价替换	对数为 $3\ln(1-2\tan x)/\tan x\to -6$，故得 e^{-6}。 易错点　分开确认正底数和指数。
2011 年 册页 66 第 13 题 主 04-3；配合或备用 04-4	$\lim_{x\to\infty}[x\tan(2/x)+\sin(x^2)/x^2]$ 两个重要极限、等价替换	首项为 $2\tan(2/x)/(2/x)\to 2$，次项绝对值不超过 $1/x^2$，得 2。 易错点　分别检查两项都有极限。
2010 年 册页 72 第 12 题 04-4	有理小量乘 $\sin(5/x)$ 夹逼、有界乘小量	趋近 0 时有理因子 $(3x^2+5x)/(5x^2+3)$ 趋零，正弦有界，故乘积趋零。 易错点　不要求正弦本身收敛。
2009 年 册页 78 第 11 题 主 04-3；配合或备用 04-5	由 $\lim_{x\to 0}(1+5x)^{k/x}=e^{10}$ 求 k 两个重要极限、等价替换	取对数得 $5k=10$，所以 $k=2$。 易错点　先取对数再比较指数。
2009 年 册页 78 第 12 题 主 04-2；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to 0}(1/x-1/(e^x-1))$ 通分、有理化或主项	①选约分、通分、有理化或同除最高次项。②在去心邻域使式子等价。③化简后取极限。 易错点　从整体识别 $\infty-\infty$ 型。
2008 年 册页 83 第 6 题 主 04-5；配合或备用 04-3	选择不能直接套洛必达的形式 未定式、洛必达	选择的具体口径待确认。若题意是不能直接作为商使用，幂式须先取对数。 易错点　若“不能使用”被解释为严格定理条件，选项表述待确认，见评注。
2008 年 册页 84 第 12 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{1/x}$ 两个重要极限、等价替换	对数极限为 -3，结果 e^{-3}。 易错点　不能把幂极限当成常数幂直接代入。
2008 年 册页 84 第 21 题 主 04-5；配合或备用 04-3	$\lim_{x\to+\infty}x(\pi/2-\arctan x)$ 未定式、洛必达	对 $x>0$ 用 $\pi/2-\arctan x=\operatorname{arctan}(1/x)$，结果为 1。 易错点　反正切恒等式有分支条件。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2007 年 册页 90 第 12 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{2/x}$ 两个重要极限、等价替换	对数极限为 6，结果 e^{6}。 易错点　底数在零点邻域为正。
2006 年 册页 95 第 2 题 主 04-6；配合或备用 04-2	四个候选极限中找有限存在者 左右极限、存在性	$x(x+1)/x^{2}=1+1/x$ 在题给的无穷远处趋 1。 易错点　按有限实数极限理解题中“存在”。
2006 年 册页 96 第 12 题 主 04-3；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to+\infty}(1-1/(4x))^{x-4}$ 两个重要极限、等价替换	对数为 $(x-4)\ln(1-1/(4x))\to -1/4$，得 $e^{-1/4}$。 易错点　指数的常数偏移不改变这个主极限。
2006 年 册页 97 第 21 题 主 04-2；配合或备用 04-5	$\lim_{x\to 1}(x/(x-1)-1/\ln x)$ 通分、有理化或主项	通分为 $(x\ln x-x+1)/[(x-1)\ln x]$，两次求导后得 $1/2$。 易错点　不能在尚未消去发散项时单独替换 $\ln x$。

05　连续性、间断点与分段参数

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 1 第 4 题 05-2	$x=1$ 对 $(x-1)/(x^{2}-1)$ 的间断类型 左右极限、间断类型	在 $x\neq 1$ 的邻域约分成 $1/(x+1)$，极限 $1/2$ 存在而原函数在点上无定义，故为可去间断点。 易错点　约分未补定义。
2022 年 册页 3 第 18 题 主 05-3；配合或备用 05-1	分段函数在零点连续求 a 分段衔接、待定参数	左支 $2a+x$ 的左极限和点值均为 $2a$； 易错点　点值取自含等号的一支。
2021 年 册页 5 第 1 题 05-2	$(x^{2}-4)/(x-2)$ 在 $x=2$ 的间断类型 左右极限、间断类型	去心邻域化为 $x+2$，极限 4，原式在 2 无定义，故为可去间断点。 易错点　区分补点后的函数。
2021 年 册页 9 第 21 题 主 05-3；配合或备用 05-1	用指数商衔接分段点 分段衔接、待定参数	非零支 $(e^{x}-1)/x\to 1$，点值 $2k+1$ 必须等于 1，得 $k=0$。 易错点　分段点值不可写成原商。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2020 年 册页 13 第 18 题 主 05-3；配合或备用 05-2	根式分段函数在 $x=1$ 连续 分段衔接、待定参数	化简 $(x-1)/(\sqrt{x}-1)=\sqrt{x}+1$，极限为 2，故 $a=2$。 易错点　先约分再取极限。
2019 年 册页 19 第 18 题 主 05-3；配合或备用 05-1	含正弦差商的连续性 分段衔接、待定参数	把 $\sin(x-2)/(x^2-4)$ 拆为 $\sin(x-2)/(x-2)\cdot 1/(x+2)$，极限 $1/4$。 易错点　分母的另一因子在分界点趋 4。
2018 年 册页 23 第 3 题 05-2	有理函数的所有间断点 左右极限、间断类型	$(x+2)(x-1)/[(x-1)(x-5)]$ 的原分母在 $1,5$ 为零； 易错点　约分只消去极限运算中的因子。
2017 年 册页 30 第 11 题 05-1	已知在 x_0 连续且极限为 3 连续性、点值	连续定义给出 $f(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(x)=3$。 易错点　有极限与点值等于极限缺一不可。
2017 年 册页 30 第 12 题 主 05-3；配合或备用 05-1	正弦分支与二次分支在全实轴连续 分段衔接、待定参数	左极限 $\sin(ax)/x\to a$，右极限和点值为 2，得 $a=2$。 易错点　$a=0$ 仍可直接求左极限。
2016 年 册页 35 第 4 题 05-2	$(x-5)/(x^2-4)$ 的间断点个数 左右极限、间断类型	分母在 $x=\pm 2$ 为零，分子在两点均不为零，所以有两个间断点。 易错点　分子零点 5 不会导致间断。
2016 年 册页 36 第 12 题 主 05-3；配合或备用 05-1	线性式与常数拼接 分段衔接、待定参数	右极限为 2，左极限与点值为 $2a$，故 $a=1$。 易错点　保持 $x=0$ 所属支。
2015 年 册页 42 第 11 题 05-1	$\ln(1-x^2)$ 的连续区间 连续性、点值	真数大于零给 $-1<x<1$，区间内由连续函数复合而连续。 易错点　端点处对数无定义。
2015 年 册页 43 第 18 题 主 05-3；配合或备用 05-1	$(x^2+ax)/\sin x$ 与点值 2 分段衔接、待定参数	写成 $(x+a)(x/\sin x)\to a$，令 $a=2$。 易错点　$k\pi$ 的其他禁点不影响零点的局部判断。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2014 年 册页 49 第 18 题 主 05-3；配合或备用 05-1	指数分支和单点值 1 的拼接 分段衔接、待定参数	指数因子在零点趋 1，去心极限为 a，所以 $a=1$。 易错点　孤立赋值不能改变去心极限。
2013 年 册页 53 第 4 题 05-2	$\cos(1/x)$ 在零点的间断 左右极限、间断类型	沿 $1/x=2n\pi$ 与 $1/x=(2n+1)\pi$ 得不同极限值 $1,-1$，故为振荡间断。 易错点　有界不保证收敛。
2013 年 册页 55 第 22 题 主 05-3；配合或备用 05-1	三段式连续求 a,b 分段衔接、待定参数	右支 $x^3\sin(1/x)$ 由夹逼趋零，左支 $a+e^x$ 趋 $a+1$。 易错点　要列两条相等条件。
2011 年 册页 65 第 4 题 05-1	极限存在是不是连续的必要条件 连续性、点值	连续必有极限。去心处恒为 0 而点值为 1 的函数有极限却不连续，因此仅必要。 易错点　避免把必要方向倒置。
2011 年 册页 67 第 21 题 主 05-2；配合或备用 05-1	三段函数在零点的连续性与间断类型 左右极限、间断类型	左支 $1-e^{1/x}\cos(1/x)\to 1$，右支 $1+\arctan(1/x)\to 1+\pi/2$。 易错点　右边的反正切趋 $\pi/2$。
2010 年 册页 72 第 21 题 主 05-3；配合或备用 05-1	$k-e^x$ 与 $3x+1$ 拼接 分段衔接、待定参数	右极限 $k-1$，左极限和点值 1，故 $k=2$。 易错点　左侧取题给含等号的线性支。
2009 年 册页 77 第 3 题 05-2	$(x^2-1)/(x^2-3x+2)$ 在 $x=1$ 的间断类型 左右极限、间断类型	约去 $x-1$ 后趋 $(1+1)/(1-2)=-2$，原式在 1 无定义，故为可去。 易错点　此题问 1，另一个分母零点不影响此处的类型。
2009 年 册页 79 第 22 题 05-1	含振荡项和对数商的三支函数 连续性、点值	左边的 $x\sin(1/x)\to 0$，故左极限为 2； 易错点　三项分别核对。
2008 年 册页 83 第 3 题 主 05-3；配合或备用 05-1	对数商与点值 2 的拼接 分段衔接、待定参数	$\ln(1+ax)/x\to a$，由连续得 $a=2$。 易错点　固定 a 后在足够小的邻域有 $1+ax>0$。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2008 年 册页 84 第 13 题 05-2	$\sqrt{x+2}/(x^2+4x+3)$ 的间断点 左右极限、间断类型	先要求 $x \geq -2$，再排查分母零点 $-3, -1$。 易错点　-3 位于自然定义域闭包之外。
2007 年 册页 90 第 13 题 05-2	$1/(1-e^{x/(1+x^2)})$ 的间断点 左右极限、间断类型	$e^u = 1$ 当且仅当 $u = 0$，而 $x/(1+x^2) = 0$ 仅在零点。 易错点　指数分母中的 $1 + x^2$ 恒正。
2007 年 册页 93 第 28 题 主 05-3；配合或备用 05-1	$\sin x/x$ 与 $a + x$ 拼接 分段衔接、待定参数	左极限 1，点值和右极限均为 a，所以 $a = 1$。 易错点　不能直接把零代入 $\sin x/x$。
2006 年 册页 95 第 3 题 主 05-3；配合或备用 05-1	$(1-e^{ax})/x$ 与点值 1 拼接 分段衔接、待定参数	去心极限 $-a$，连续要求 $-a = 1$，得 $a = -1$。 易错点　保留分子开头的负号。

06　导数定义、分段点可导性与关系判断

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 1 第 5 题 06-1	$\lim_{x\to 0}[f(1)-f(1-3x)]/x$ 差商、真实增量	令 $h = -3x$，化成 $3[f(1+h)-f(1)]/h$，结果 $3f'(1)$。 易错点　分子与增量各有一个负号。
2021 年 册页 6 第 7 题 主 06-2；配合或备用 06-3	$\lvert x\rvert$ 在零点的可导与极值 左右导数、分段点	左、右差商分别为 $-1, 1$，所以不可导。 易错点　不可导点也可能取得极值。
2016 年 册页 40 第 25 题 主 06-2；配合或备用 06-1	$f(x) = x\lvert x\rvert$ 在零点的导数与单调性 左右导数、分段点	差商为 $\lvert h\rvert \to 0$，所以 $f'(0) = 0$。 易错点　单个点导数为零不阻止严格单调。
2015 年 册页 46 第 25 题 主 06-2；配合或备用 06-1	振荡分段函数的零点可导性及邻域单调性 左右导数、分段点	$f(x) = x/2 + x^2\sin(1/x)$（非零时）。 易错点　一点导数为正推不出邻域单调。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2014 年 册页 48 第 10 题 主 06-3；配合或备用 06-1	在 1 可导且 $f(x)/(x-1)$ 有有限极限 连续、可导与条件方向	由 $f(x)=(x-1)[f(x)/(x-1)]\to 0$，再由可导蕴含连续得 $f(1)=0$。 易错点　给出的商起初并非导数定义。
2013 年 册页 53 第 5 题 主 06-2；配合或备用 06-3	$\lvert x\rvert$ 在零点是否连续、可导或可微 左右导数、分段点	两侧函数值均趋零，所以连续，但单侧导数分别 $-1,1$，不可导也不可微。 易错点　一元函数在一点可微与可导等价。
2013 年 册页 54 第 13 题 06-1	已知 $f'(1)=4$，求 $[f(1-h)-f(1)]/(4h)$ 的极限 差商、真实增量	令增量 $u=-h$，把系数 $-1/4$ 提出，得 -1。 易错点　差商分母应为真正增量。
2012 年 册页 59 第 3 题 主 06-3；配合或备用 06-2	连续能否推出可导 连续、可导与条件方向	可能可导，如 $f(x)=x$； 易错点　“不一定”和“一定不可导”不同。
2012 年 册页 59 第 4 题 06-1	两侧增量的导数型极限 差商、真实增量	加减 $f(a)$，把 $[f(a+x)-f(a-x)]/x$ 拆成两个都趋 $f'(a)$ 的项，得 $2f'(a)$。 易错点　增量 $-x$ 同时带来符号变化。
2012 年 册页 61 第 22 题 主 06-2；配合或备用 06-3	x^2 与 $ax+b$ 在 $x=1$ 拼接 左右导数、分段点	连续给 $a+b=1$，两侧导数相等给 $a=2$，故 $b=-1$。 易错点　先对齐函数值，再对齐斜率。
2011 年 册页 65 第 5 题 06-1	$[f(1)-f(1-x)]/(2x)$ 的极限 差商、真实增量	取 $h=-x$，式子为 $\frac{1}{2}[f(1+h)-f(1)]/h$，得 $\frac{1}{2}f'(1)$。 易错点　自变量位置是 1。
2010 年 册页 71 第 3 题 06-1	只知 g 在 a 连续，求 $[(x-a)g(x)]'_{x=a}$ 差商、真实增量	$f(a)=0$，差商直接约去 $x-a$ 得 $g(x)\to g(a)$。 易错点　题设只保证 g 连续，不能直接写含 g' 的乘积法则。
2010 年 册页 72 第 14 题 06-1	由 $[f(x_0)-f(x_0+7h)]/h\to 3$ 求导数 差商、真实增量	原式为 -7 乘定义差商，故 $f'(x_0)=-3/7$。 易错点　别把分母 h 当成真实增量 $7h$。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2009 年 册页 77 第 4 题 06-3	连续是可导的什么条件 连续、可导与条件方向	可导推出连续。反例 $\lvert x-x_0\rvert$ 连续但左右导数不等，所以连续是必要非充分条件。 易错点　判断的方向从“可导”出发。
2009 年 册页 77 第 5 题 06-1	$[f(x_0)-f(x_0-2h)]/h$ 的极限 差商、真实增量	令增量 $u=-2h$，原式是 2 倍定义差商，得 $2f'(x_0)$。 易错点　两个负号抵消。
2008 年 册页 83 第 5 题 06-3	判断连续与可导的充分必要关系 连续、可导与条件方向	可导推出连续；$\lvert x-x_0\rvert$ 说明连续不足以保证可导。 易错点　反例须同时满足“连续”和“不可导”。
2007 年 册页 89 第 4 题 主 06-2；配合或备用 06-1	$x^n\sin(1/x)$ 补零后何时可导 左右导数、分段点	在表达式有定义的各侧，零点差商为 $x^{n-1}\sin(1/x)$。 易错点　先算除以 x 之后的阶数，实幂定义随题设取值范围。
2006 年 册页 95 第 6 题 主 06-2；配合或备用 06-3	在 2 连续但不可导的选项 左右导数、分段点	$\lvert x-2\rvert$ 在 2 连续，左右导数为 $-1,1$。 易错点　区分尖点与定义域缺口。

07　显函数求导、高阶导数与微分

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 1 第 6 题 主 07-2；配合或备用 07-1	$y=\sin^2(2x)$ 求 y' 复合函数、链式	按平方、正弦、$2x$ 三层求导得 $4\sin(2x)\cos(2x)=2\sin(4x)$。 易错点　内层导数是 2。
2021 年 册页 5 第 5 题 主 07-2；配合或备用 07-1	$y=2^{-x}+\ln 3$ 求导 复合函数、链式	指数项求导得 $-2^{-x}\ln 2$，常数项导数为零。 易错点　$\ln 3$ 不是变量项。
2021 年 册页 6 第 14 题 主 07-5；配合或备用 07-2	$y=\ln(2/x)$ 求微分 微分、导数	在 $x>0$ 写成 $\ln 2-\ln x$，得 $dy=-dx/x$。 易错点　微分带 dx。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2020 年 册页 11 第 5 题 07-1	$f(x)=x^{2020}$ 求 $f'(1)$ 四则求导	幂法则给 $2020x^{2019}$，代 1 得 2020。 易错点　先求导再代点。
2020 年 册页 12 第 6 题 主 07-5；配合或备用 07-2	$y+\ln(2x)=2$ 求微分 微分、导数	移项后 $y'=-(2/(2x))=-1/x$，所以 $dy=-dx/x$。 易错点　链式法则的 2 会约掉。
2020 年 册页 12 第 13 题 07-1	$f(x)=\tan x$ 求 $f'(0)$ 四则求导	$f'(x)=\sec^2 x$，故 $f'(0)=1$。 易错点　切勿误写为 $1/\sin^2 x$。
2020 年 册页 12 第 14 题 主 07-4；配合或备用 07-1	$f(x)=x+\sin x$ 求 $f''(x)$ 高阶导数、规律	$f'=1+\cos x$，再求导得 $-\sin x$。 易错点　常数项二次求导后消失。
2019 年 册页 17 第 5 题 主 07-4；配合或备用 07-2	$y=\cos 2x$ 的二阶导数 高阶导数、规律	两次求导为 $-2\sin 2x$ 和 $-4\cos 2x$。 易错点　内层倍数每求一次都出现。
2019 年 册页 18 第 13 题 主 07-5；配合或备用 07-2	$y=\cos x+e^{x^2}$ 的微分 微分、导数	得 $dy=(-\sin x+2xe^{x^2})\,dx$。 易错点　指数是 x^2，内导数为 $2x$。
2017 年 册页 31 第 19 题 主 07-2；配合或备用 07-1	$y=\ln(x+\sqrt{4+x^2})$ 的导数 复合函数、链式	商写为 $(1+x/\sqrt{4+x^2})/(x+\sqrt{4+x^2})$，化简为 $1/\sqrt{4+x^2}$。 易错点　被取对数的量恒正。
2016 年 册页 35 第 6 题 主 07-5；配合或备用 07-2	$y=e^{-x}$ 的微分 微分、导数	链式法则得 $-e^{-x}$，所以 $dy=-e^{-x}\,dx$。 易错点　指数不改成 $+x$。
2015 年 册页 41 第 4 题 主 07-2；配合或备用 07-1	$y=e^{2015x}$ 的一阶导数 复合函数、链式	内层导数 2015，故 $y'=2015e^{2015x}$。 易错点　指数系数同时保留在指数和外因子中。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2014 年 册页 47 第 5 题 主 07-4；配合或备用 07-1	$f(x)=5x+e^x$ 求 $f''(1)$ 高阶导数、规律	$f'=5+e^x$，$f''=e^x$，代入得 e。 易错点　线性项不贡献二阶导数。
2013 年 册页 53 第 6 题 主 07-4；配合或备用 07-2	$y=2^x$ 的第 2013 阶导数 高阶导数、规律	每求导一次乘 $\ln 2$，由归纳得 $y^{(2013)}=2^x(\ln 2)^{2013}$。 易错点　保留底数 2。
2013 年 册页 55 第 23 题 主 07-5；配合或备用 07-2	$y=e^{2x}\sin(\ln x)$ 的微分 微分、导数	逐因子求导再用乘积法则，$dy=e^{2x}[2\sin(\ln x)+\cos(\ln x)/x]\,dx$，$x>0$。 易错点　两处复合都要乘内层导数。
2012 年 册页 60 第 13 题 主 07-3；配合或备用 07-2	$y=x^x$ 在 $x>0$ 的导数 对数求导、符号	$\ln y=x\ln x$，微分得 $y'/y=\ln x+1$，故 $y'=x^x(\ln x+1)$。 易错点　底和指数都变化，不能用单一幂法则。
2012 年 册页 60 第 14 题 主 07-4；配合或备用 07-1	$y=x\ln x$ 的二阶导数在 $x=\sqrt{5}$ 的值 高阶导数、规律	$y'=\ln x+1$，$y''=1/x$，代入得 $1/\sqrt{5}$。 易错点　题目求二阶导数的点值。
2011 年 册页 65 第 6 题 主 07-4；配合或备用 07-1	$y=xe^{2x}$ 的十阶导数 高阶导数、规律	用乘积高阶求导，仅 x 的零阶和一阶导数有贡献，得 $e^{2x}[2^{10}x+10\cdot 2^9]=2^9(2x+10)e^{2x}$。 易错点　一阶导数项有组合系数 10。
2011 年 册页 67 第 23 题 主 07-3；配合或备用 07-5	乘商与根式复合的微分 对数求导、符号	设 $y=(x-1)\sqrt[3]{x+2}/[(x-3)^2e^{2x}]$。 易错点　对数化中途排除的零点须回原式检查。
2010 年 册页 71 第 4 题 主 07-4；配合或备用 07-1	十六次多项式求十七阶导数 高阶导数、规律	多项式次数最高为 16，第十七次求导各项都为零，因此所求点值为 0。 易错点　与 16 阶导数区分。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2009 年 册页 77 第 6 题 主 07-4；配合或备用 07-2	$y=\ln(1+x)$ 求第十阶导数 高阶导数、规律	由 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!/(1+x)^n$，得 $-9!/(1+x)^{10}$，$x>-1$。 易错点　阶乘从一阶导数的常数 1 开始。
2009 年 册页 78 第 13 题 主 07-2；配合或备用 07-1	$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 求导 复合函数、链式	利用 $(1+x/\sqrt{1+x^2})/(x+\sqrt{1+x^2})$，化简得 $1/\sqrt{1+x^2}$。 易错点　对数内为正。
2009 年 册页 78 第 14 题 主 07-5；配合或备用 07-2	指数乘余弦求微分 微分、导数	对 $y=e^{1-3x}\cos x$ 用乘积法则，得 $dy=e^{1-3x}(-3\cos x-\sin x)dx$。 易错点　余弦求导含负号。
2008 年 册页 83 第 4 题 主 07-4；配合或备用 07-1	$y=x\ln x$ 的第十阶导数 高阶导数、规律	二阶导数为 $1/x$，继续求八次导得 $8!/x^9$。 易错点　x^{-1} 的八次导号为正。
2008 年 册页 84 第 14 题 主 07-2；配合或备用 07-1	$y=f(e^x)e^{f(x)}$ 求 y' 复合函数、链式	分别求导后相加，得 $e^{f(x)}[e^xf'(e^x)+f(e^x)f'(x)]$。 易错点　$f'(e^x)$ 与 $f'(x)$ 出现在不同项。
2008 年 册页 84 第 15 题 主 07-4；配合或备用 07-1	$f(x)=x^3\ln x$ 求 $f''(1)$ 高阶导数、规律	$f'=3x^2\ln x+x^2$，$f''=6x\ln x+5x$，代 1 得 5。 易错点　不要先把 $\ln 1$ 消掉再求导。
2007 年 册页 91 第 22 题 主 07-4；配合或备用 07-1	$y=\ln(1+x)$ 求高阶导数 高阶导数、规律	依次有 $y'=1/(1+x)$、$y''=-1/(1+x)^2$。 易错点　确认撇号数量后再抄最终答案。
2006 年 册页 95 第 5 题 主 07-2；配合或备用 07-1	$y=\cos(e^{-x})$ 求导 复合函数、链式	外层导数 $-\sin(e^{-x})$，内层导数 $-e^{-x}$，相乘得 $e^{-x}\sin(e^{-x})$。 易错点　两个负号抵消。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2006 年 册页 96 第 13 题 主 07-2；配合或备用 07-1	可微 f 构造的商 $f(e^x)/e^{f(x)}$ 复合函数、链式	改写成 $f(e^x)e^{-f(x)}$，求得 $e^{-f(x)}[e^x f'(e^x)-f(e^x)f'(x)]$。 易错点　分母指数求导也要乘 $f'(x)$。
2006 年 册页 96 第 14 题 主 07-4；配合或备用 07-1	$f(x)=xe^{-x}$ 求 $f''(-1)$ 高阶导数、规律	$f'=(1-x)e^{-x}$，$f''=(x-2)e^{-x}$，代 -1 得 $-3e$。 易错点　负自变量代入 e^{-x} 得 e。
2006 年 册页 97 第 22 题 主 07-5；配合或备用 07-1	反正弦与根式乘和的微分 微分、导数	对 $3x^3\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$ 逐项求导，含根式分母的两项合成 $-2x\sqrt{1-x^2}$，与根式项 $2x\sqrt{1-x^2}$ 抵消，故 $dy=9x^2\arcsin x\,dx$（$\lvert x\rvert<1$）。 易错点　先按内点使用链式法则，再观察消项。

08　隐函数与参数方程求导

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 3 第 19 题 08-1	$\sin y+y^2-3x=0$ 求 dy 隐函数、链式	两边微分得 $(\cos y+2y)dy=3dx$，当系数非零时 $dy=3dx/(\cos y+2y)$。 易错点　含 y 的两项都要带 dy。
2021 年 册页 7 第 17 题 主 08-3；配合或备用 08-1	$xe^{-y}-1=0$ 的反向导数与切线 显式化、分支	解得 $x=e^y$，所以 $dx/dy=e^y=x$。 易错点　题的第一问求的是 dx/dy。
2020 年 册页 14 第 19 题 主 08-2；配合或备用 08-3	$x=2t$，$y=\sin t$ 与 $t=0$ 处切线 参数导数、二阶	点为 $(0,0)$，$dx/dt=2$，$dy/dt=\cos t$，切线斜率 $1/2$，得 $y=x/2$。 易错点　参数 t 不能直接当横坐标。
2018 年 册页 25 第 18 题 08-1	$y^2+2y+x=0$ 求导并写切线 隐函数、链式	$2(y+1)y'+1=0$，$y'=-1/[2(y+1)]$； 易错点　斜率要在指定分支的点代入。
2016 年 册页 37 第 19 题 08-1	$x+y=e^y$ 的隐函数导数 隐函数、链式	$1+y'=e^y y'$，故 $y'=1/(e^y-1)$，分母非零的分支有效。 易错点　不要漏掉左边的 y'。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2015 年 册页 43 第 19 题 08-1	$e^y+2xy=x^2$ 求 y' 隐函数、链式	$(e^y+2x)y'=2x-2y$，故 $y'=2(x-y)/(e^y+2x)$，当分母非零。 易错点　乘积 xy 两项都要求导。
2014 年 册页 48 第 13 题 主 08-2；配合或备用 08-3	$x=t^2/2,\ y=t+1$ 求 dy/dx 参数导数、二阶	用比值 $1/t$（$t\neq 0$）。 易错点　公式要求 $dx/dt\neq 0$。
2013 年 册页 55 第 24 题 08-1	$y^2=x^2+ye^x$ 求 y' 隐函数、链式	求导得 $(2y-e^x)y'=2x+ye^x$，故可除时为 $(2x+ye^x)/(2y-e^x)$。 易错点　右边 ye^x 的 y 也变化。
2012 年 册页 61 第 23 题 08-1	$y=\sin(x+y)$ 求微分 隐函数、链式	$dy=\cos(x+y)(dx+dy)$，移项得 $dy=[\cos(x+y)/(1-\cos(x+y))]dx$，分母须非零。 易错点　内层微分为 $dx+dy$。
2012 年 册页 61 第 24 题 主 08-3；配合或备用 08-2	$x=\sin t,\ y=\cos 2t$ 的二阶导数 显式化、分支	用 $\cos 2t=1-2\sin^2 t$ 消参得 $y=1-2x^2$，因此二阶导数为 -4。 易错点　直接套参数公式会遇到 $\cos t=0$，消参可识别分支表达。
2011 年 册页 68 第 24 题 主 08-3；配合或备用 08-2	$x=\arcsin t,\ y=\sqrt{1-t^2}$ 的二阶导数 显式化、分支	$t=\sin x$ 且 $x\in[-\pi/2,\pi/2]$，所以 $y=\cos x$，二阶导数为 $-\cos x=-\sqrt{1-t^2}$（内点）。 易错点　用主值范围确定根式符号。
2010 年 册页 73 第 23 题 08-1	$ye^x+\ln y=2$ 的隐函数导数 隐函数、链式	由 $(e^x+1/y)y'=-ye^x$，得 $y'=-y^2e^x/(ye^x+1)$，$y>0$。 易错点　对数限制 y 的符号。
2010 年 册页 73 第 24 题 主 08-2；配合或备用 08-3	$x=\cos t,\ y=\sin t$ 求二阶导数 参数导数、二阶	先得 $y'=-\cot t$，再以 $\csc^2 t$ 除 $dx/dt=-\sin t$，得 $-\csc^3 t$（$\sin t\neq 0$）。 易错点　二阶不能用 y_{tt}/x_{tt}。
2009 年 册页 79 第 23 题 主 08-4；配合或备用 08-2	$x=(\ln t)^2,\ y=t\ln t-t$ 在 $t=1$ 的导数 退化点、点差商	$t\neq 1$ 时比值 $(\ln t)/(2\ln t/t)=t/2$。 易错点　不能把 $0/0$ 直接写成数。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2009 年 册页 79 第 24 题 08-1	$y=xe^{y}$ 求一、二阶导数 隐函数、链式	整理得 $(1-y)y'=e^{y}$，故 $y'=e^{y}/(1-y)$。 易错点　第二次对 y 的表达式求导必须乘 y'。
2008 年 册页 85 第 22 题 08-2	$x=\theta(1-\sin\theta)$，$y=\theta\cos\theta$ 在 $\theta=0$ 的导数 参数导数、二阶	分别对 θ 求导，在零点 $x_\theta=y_\theta=1$，所以斜率为 1。 易错点　先求导，再代零。
2008 年 册页 85 第 23 题 08-1	$y=xe^{y}+1$ 求 y' 隐函数、链式	$y'=e^{y}+xe^{y}y'$，故 $y'=e^{y}/(1-xe^{y})=e^{y}/(2-y)$（分母非零）。 易错点　用原关系化简时常数为 1。
2007 年 册页 90 第 14 题 08-1	$\ln(x+y)=xy^{2}+\sin x$ 在 $x=0$ 的导数 隐函数、链式	先由 $\ln y=0$ 求 $y=1$。 易错点　别把 $x=0$ 事先代入整个方程再求导。
2006 年 册页 97 第 23 题 主 08-3；配合或备用 08-1	$xy+\ln x+\ln y=1$ 求导 显式化、分支	因 $x,y>0$，令 $u=xy$，有 $u+\ln u=1$； 易错点　先检查 $\ln x+\ln y$ 可并成 $\ln(xy)$。

09　曲线切线与法线

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 2 第 13 题 09-1	$y=x^{2022}$ 在 $x=1$ 的切线 切点、点斜式	切点 $(1,1)$，斜率 2022，得 $y-1=2022(x-1)$。 易错点　点值和导数值分别求。
2019 年 册页 19 第 19 题 主 09-1；配合或备用 09-2	$y=x-1/x$ 在 $(1,0)$ 的两条线 切点、点斜式	$y'=1+1/x^{2}$，在 1 为 2。 易错点　负倒数只在切线斜率非零时直接使用。
2017 年 册页 31 第 18 题 主 09-3；配合或备用 09-1	$e^{y}+2x+y=3$ 上纵坐标为零处的切线 参数、隐式或斜率约束	先令 $y=0$ 得 $x=1$，再对原式求导得 $(e^{y}+1)y'=-2$。 易错点　这题只给纵坐标。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2015 年 册页 42 第 13 题 主 09-3；配合或备用 09-1	$x=t^3$，$y=e^t$ 在 $t=1$ 的切线 参数、隐式或斜率约束	切点 $(1,e)$，斜率为 $(dy/dt)/(dx/dt)=e/3$，故 $y-e=(e/3)(x-1)$。 易错点　不要把 dy/dt 直接当斜率。
2014 年 册页 50 第 20 题 主 09-3；配合或备用 09-1	$x=y^2+y-1$ 在 $(1,1)$ 的切线 参数、隐式或斜率约束	由 $dx/dy=2y+1=3$ 取倒数为切线斜率，得 $y-1=(x-1)/3$。 易错点　先区分求的是 dx/dy 还是 dy/dx。
2013 年 册页 54 第 14 题 主 09-3；配合或备用 09-1	椭圆参数式在指定点的切线 参数、隐式或斜率约束	$x=\cos t$，$y=2\sin t$ 在 $(\sqrt{2}/2,\sqrt{2})$ 对应 $t=\pi/4$。 易错点　两个坐标同时决定参数。
2012 年 册页 60 第 15 题 主 09-2；配合或备用 09-1	$y=x^2+1$ 在 $(1,2)$ 的法线 法线、垂直方向	切线斜率 2，法线斜率 $-1/2$，方程 $y-2=-(x-1)/2$。 易错点　使用指定点的斜率。
2011 年 册页 66 第 14 题 主 09-3；配合或备用 09-1	$xe^y+xy+y=1$ 在 $x=0$ 的切线 参数、隐式或斜率约束	切点 $(0,1)$。隐式求导得 $(xe^y+x+1)y'=-(e^y+y)$，斜率 $-(e+1)$，故 $y=1-(e+1)x$。 易错点　切点纵坐标由原式求。
2010 年 册页 72 第 13 题 09-2	$y=\cos x$ 在 $(\pi/3,1/2)$ 的法线斜率 法线、垂直方向	切线斜率 $-\sqrt{3}/2$，法线斜率 $2/\sqrt{3}$。 易错点　负倒数变为正。
2009 年 册页 78 第 15 题 主 09-3；配合或备用 09-1	$y=x^3$ 上切线倾角为 $\pi/4$ 参数、隐式或斜率约束	斜率要求 $3x^2=\tan(\pi/4)=1$，故两处横坐标为 $\pm1/\sqrt{3}$。 易错点　倾角等于 $\pi/4$ 不等于斜率是 $\pi/4$。
2008 年 册页 84 第 16 题 09-1	$y=x+e^x$ 在 $x=0$ 的切线 切点、点斜式	点 $(0,1)$，斜率 $1+e^0=2$，得 $y=2x+1$。 易错点　$e^0=1$。
2007 年 册页 90 第 17 题 09-1	$y=x^3+1$ 在 $(1,2)$ 的切线 切点、点斜式	由 $y'=3x^2$ 得斜率 3，代点得 $y=3x-1$。 易错点　用整条直线而非只报斜率。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2006 年 册页 95 第 4 题 09-1	$y=x+\ln x$ 在 $(1,1)$ 的切线 切点、点斜式	$y'=1+1/x$，在 1 为 2，得 $y=2x-1$。 易错点　由点斜式核对截距。

10　单调性、极值与区间最值

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2021 年 册页 6 第 13 题 10-1	三次多项式的单调递减区间 导数符号、单调	$f'=6(x-1)(x-2)$，在两根之间为负，故下降段为 $(1,2)$（若采用含端点的单调区间记法，可写 $[1,2]$）。 易错点　不能只解 $f'=0$。
2020 年 册页 11 第 4 题 主 10-2；配合或备用 10-4	x^2+1 在 $[-1,2]$ 的最小值 闭区间、最值	候选点为 $-1,0,2$，函数值为 $2,1,5$，故最小值 1。 易错点　求值而非只写取值点。
2018 年 册页 23 第 5 题 10-1	已知 $f'>0$ 比较 $f(0),f(1)$ 导数符号、单调	在 $[0,1]$ 上连续且在内部 $f'>0$，由拉格朗日中值定理得 $f(1)-f(0)=f'(\xi)>0$。 易错点　端点的符号无法由单调性推出。
2018 年 册页 23 第 6 题 10-5	驻点处 $f''(x_0)<0$ 判定极值 二阶导数、极值判别	题设 $f'(x_0)=0$ 且二阶导数负，驻点两侧一阶导数由正变负，故取极大值。 易错点　极大值是局部结论。
2018 年 册页 24 第 13 题 10-1	$f'=(x+2)(x-2)$ 的递减区间 导数符号、单调	开口向上的二次式在 $-2<x<2$ 为负，故主要下降段为 $(-2,2)$。 易错点　区分 f 与 f' 自身的单调性。
2018 年 册页 24 第 14 题 主 10-3；配合或备用 10-5	ax^2+2x+c 在 1 取极值 2 驻点、参数	由 $f'(1)=2a+2=0$ 得 $a=-1$，由 $f(1)=2$ 得 $c=1$，且 $f''=-2<0$ 验证极大。 易错点　给的是极值还要列点值式。
2017 年 册页 29 第 6 题 10-4	极大值点的必要条件 极值定义、特殊点	若内点可导，则由费马定理 $f'(x_0)=0$。 易错点　题设未承诺二阶导数存在。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2014 年 册页 48 第 16 题 主 10-2；配合或备用 10-1	积分函数在 $[-2,1/2]$ 的最小值点 闭区间、最值	由变上限求导得 $f'=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$，在开区间内为负，故最小值点在右端 $x=1/2$。 易错点　此题要点的位置。
2012 年 册页 59 第 6 题 主 10-3；配合或备用 10-5	ax^2+x+1 在 $x=1$ 取得极大值 驻点、参数	$2a+1=0$ 得 $a=-1/2$； 易错点　驻点候选还应检查极值性质。
2011 年 册页 66 第 15 题 主 10-1；配合或备用 10-5	$f(x)=\int_{1/2}^{x}\ln t\,dt$ 的极值点 导数符号、单调	在 $x>0$ 有 $f'(x)=\ln x$，左负右正，故 $x=1$ 是极小值点。 易错点　积分下限 $1/2$ 不是驻点。
2010 年 册页 71 第 5 题 主 10-1；配合或备用 10-4	判断 $x=0$ 是否为指数函数的极值点 导数符号、单调	对 e^{x^2+2x} 求导，在 0 得 $2\neq 0$； 易错点　零点是 $f(x)=0$，驻点是 $f'(x)=0$。
2009 年 册页 77 第 8 题 10-1	由闭区间连续、开区间 $f'>0$ 比较端点 导数符号、单调	由拉格朗日中值定理，$f(1)-f(0)=f'(\xi)>0$。 易错点　区间内每点的导数条件才能这样比较。
2008 年 册页 85 第 24 题 主 10-4；配合或备用 10-1	$y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间与极值 极值定义、特殊点	在 $x\neq 0$ 有 $y'=2+2/\sqrt[3]{x}$。 易错点　不可导的 0 必须作为分界候选。
2007 年 册页 91 第 23 题 主 10-2；配合或备用 10-1	$x/(1+x^2)$ 在 $[-2,2]$ 的最值 闭区间、最值	导数 $(1-x^2)/(1+x^2)^2$ 给驻点 ±1。 易错点　闭区间要把两端加入比较。
2006 年 册页 96 第 15 题 10-1	$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的递增区间 导数符号、单调	根式大于 $\lvert x\rvert$，定义域是全实数。 易错点　别误把 $x>0$ 当对数条件。
2006 年 册页 98 第 24 题 主 10-3；配合或备用 10-5	x^3+ax^2+bx 在 1 有极值 -2 驻点、参数	列 $a+b=-3$ 和 $2a+b=-3$，得 $a=0,b=-3$。 易错点　极值与驻点值分别列式。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2006 年 册页 100 第 30 题 主 10-2；配合或备用 10-1	变上限积分函数在题给闭区间上的最大、最小值 闭区间、最值	先以积分上限代入被积函数求导，找出区间内驻点，再把驻点和两个端点的积分值列在同一表中比较。 易错点　题型可判，不能用模糊端点计算。

11　曲线凹凸性与拐点

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 2 第 8 题 主 11-1；配合或备用 11-2	$y=x^3-3x^2$ 的拐点 二阶导数、凹凸	$y''=6x-6$ 在 $x=1$ 由负转正，代原式得 $(1,-2)$。 易错点　拐点坐标含纵坐标。
2021 年 册页 6 第 6 题 主 11-2；配合或备用 11-4	$x^{1/3}$ 的单调性与拐点 候选拐点、变号	立方根在全实轴严格递增，且 $f''(x)=-2/(9x^{5/3})$ 在零点左右变号，函数在 $(0,0)$ 连续，故有拐点。 易错点　二阶导数在拐点可以不存在。
2020 年 册页 12 第 7 题 主 11-1；配合或备用 11-3	x^3 在负半轴的单调与凹凸 二阶导数、凹凸	$f'=3x^2>0$，$f''=6x<0$，所以递增且按试卷术语为凸（弯向下）。 易错点　递增与弯曲方向分别判断。
2019 年 册页 18 第 7 题 主 11-3；配合或备用 11-1	严格递增且凹的二阶可导函数 斜率变化、凹凸	凹给 $f''\geq 0$，从而 f' 不减。 易错点　单独的严格递增不能推出导数处处大于零；这里还用了凹性。
2017 年 册页 30 第 13 题 11-1	$x^3-\frac{3}{2}x^2+1$ 的凹区间 二阶导数、凹凸	$f''=6x-3$，按试卷术语为凹（弯向上）的开区间是 $(1/2,+\infty)$。 易错点　此题问区间而非拐点。
2016 年 册页 35 第 7 题 主 11-4；配合或备用 11-3	从图判断 $[1,+\infty)$ 上的状态 图像、斜率	第 35 页画出曲线，备选项在第 36 页。 易错点　只读题目指定区间。
2016 年 册页 38 第 21 题 主 11-1；配合或备用 11-2	已知 x^3+ax^2+b 的拐点是 $(1,-1)$ 二阶导数、凹凸	$f''(1)=6+2a=0$ 得 $a=-3$； 易错点　给定拐点的两个坐标提供两个条件。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2015 年 册页 41 第 5 题 11-1	x^3 在正半轴的单调与凹凸 二阶导数、凹凸	在 $x>0$，$f'=3x^2>0$、$f''=6x>0$，所以递增且凹（弯向上）。 易错点　区间是正半轴。
2014 年 册页 47 第 4 题 11-1	x^2-2x+3 在 $(-\infty,1]$ 的性态 二阶导数、凹凸	$f'=2x-2<0$ 于内部，$f''=2>0$，所以在题给区间递减且凹（弯向上）。 易错点　端点导数为零不改变整段的单调性。
2013 年 册页 54 第 15 题 主 11-1；配合或备用 11-2	$x^2(3-x)$ 的拐点 二阶导数、凹凸	$f''=6-6x$ 在 1 变号，$f(1)=2$，拐点 $(1,2)$。 易错点　先变号再代回原函数。
2012 年 册页 60 第 16 题 主 11-1；配合或备用 11-2	$2x^3-3x^2+4$ 的拐点 二阶导数、凹凸	$f''=12x-6$ 在 $1/2$ 变号，代原式得 $f(1/2)=7/2$，拐点 $(1/2,7/2)$。 易错点　不要把 f'' 的零当纵坐标。
2011 年 册页 66 第 7 题 11-1	已知 $f'>0, f''>0$ 的性质 二阶导数、凹凸	前者给严格递增，后者给凹（弯向上），符合题列相应组合。 易错点　两个导数分别对应斜率和斜率变化。
2010 年 册页 72 第 16 题 主 11-1；配合或备用 11-2	xe^{-x} 的拐点 二阶导数、凹凸	$f''=(x-2)e^{-x}$，在 2 变号，拐点 $(2,2e^{-2})$。 易错点　指数因子恒正。
2009 年 册页 78 第 17 题 主 11-1；配合或备用 11-2	$e^{-(x-1)^2}$ 的拐点横坐标 二阶导数、凹凸	$f''=[4(x-1)^2-2]e^{-(x-1)^2}$，两零点 $1\pm1/\sqrt{2}$ 均变号。 易错点　只问横坐标，也需查两根。
2008 年 册页 83 第 7 题 主 11-2；配合或备用 11-1	$f''(x_0)=0$ 与拐点的关系 候选拐点、变号	若 $f''(x_0)$ 存在且两侧凹凸改变，那么它必须为零； 易错点　先看是否预设该点二阶导数存在。
2008 年 册页 84 第 17 题 主 11-1；配合或备用 11-2	$1+\sqrt[3]{x}$ 的凹区间 二阶导数、凹凸	$f''=-2/(9x^{5/3})$，在 $x<0$ 为正、在 $x>0$ 为负。 易错点　实立方根在负半轴照样有定义。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2006 年 册页 96 第 7 题 11-1	$x\arctan x$ 的凹凸性 二阶导数、凹凸	算出 $f'=\arctan x+x/(1+x^2)$，再求 $f''=2/(1+x^2)^2>0$，全实轴凹（弯向上）。 易错点　两项二阶导要通分后判断。

12　中值定理与不等式证明

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2017 年 册页 29 第 5 题 12-1	同端值时 $f'(x)=0$ 的解存在 罗尔定理、端点同值	题设可导给闭区间连续及内部可导，另有 $f(a)=f(b)$。 易错点　只保证至少一个。
2017 年 册页 30 第 10 题 主 12-2；配合或备用 12-3	严格割线斜率界与严格导数界 中值定理、割线斜率	若处处 $\lvert f'\rvert<1$，由中值定理所有不同点的割线斜率绝对值都小于 1。 易错点　过极限时严格不等号可变成等号。
2015 年 册页 41 第 6 题 12-1	筛选满足罗尔定理条件的函数 罗尔定理、端点同值	在 $[-1,1]$，x^2+1 连续、内部可导且两端同值。 易错点　三个条件要分别检验。
2014 年 册页 47 第 6 题 12-1	求 $(x-1)^2$ 满足罗尔条件的区间 罗尔定理、端点同值	多项式已满足正则性。只需让端点关于 1 对称，所给选项中 $[-1,3]$ 两端函数值都是 4。 易错点　取端点函数值相等，不取导数相等。
2013 年 册页 54 第 16 题 12-2	$2e^x$ 在 $[0,1]$ 上的中值点 中值定理、割线斜率	平均斜率 $2(e-1)$，令 $2e^{\xi}=2(e-1)$，得 $\xi=\ln(e-1)\in(0,1)$。 易错点　中值点是自变量。
2013 年 册页 58 第 31 题 12-4	证明 $x<0$ 时 $2\arctan x<\ln(1+x^2)$ 符号比较、严格不等	左侧因反正切递增且 $\arctan 0=0$ 而为负； 易错点　先检查两侧符号，能省去构造差函数。
2012 年 册页 59 第 5 题 12-1	已知 $f=(x-1)(x-2)(x-3)$，问 $f'=0$ 根数 罗尔定理、端点同值	各相邻零点之间由罗尔定理至少各有一个，再由 f' 为二次多项式知至多两个，故恰有两个。 易错点　用次数给出上界才得到恰好。
2011 年 册页 70 第 31 题 主 12-2；配合或备用 12-3	证明对数的双边界 中值定理、割线斜率	对 $\ln x$ 在 $[a,b]$ 用中值定理，$\ln(b/a)=(b-a)/\xi$，$a<\xi<b$，于是 $(b-a)/b<\ln(b/a)<(b-a)/a$。 易错点　倒数反序且 a,b 均正。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2010 年 册页 72 第 15 题 12-2	$\arctan x$ 在 $[0,1]$ 的中值点 中值定理、割线斜率	割线斜率为 $\pi/4$，解 $1/(1+\xi^2)=\pi/4$，取区间内正根 $\xi=\sqrt{4/\pi-1}$。 易错点　负根不在指定区间。
2010 年 册页 76 第 31 题 12-1	已知 $f(2)=0$，证明 $[(x-1)f(x)]'$ 有零点 罗尔定理、端点同值	令 $F(x)=(x-1)f(x)$。 易错点　端点为零的原因各不同。
2009 年 册页 78 第 16 题 12-2	$\sqrt{x}$ 在 $[1,4]$ 的中值点 中值定理、割线斜率	割线斜率为 $(2-1)/(4-1)=1/3$，解 $1/(2\sqrt{\xi})=1/3$ 得 $\xi=9/4$。 易错点　检验结果确在开区间内。
2008 年 册页 88 第 31 题 12-3	证明 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$ 差函数、单调性	对左减右得 $F(0)=0$。 易错点　比较从能代入的锚点 0 出发。
2007 年 册页 90 第 6 题 12-1	在 $[-1,1]$ 判断罗尔定理适用项 罗尔定理、端点同值	$f(x)=x^2$ 连续、内部可导且两端同值。 易错点　连续不足以保证能用罗尔。
2007 年 册页 94 第 31 题 主 12-3；配合或备用 12-2	证明 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$ 并推出整数式 差函数、单调性	令 $F=\ln(1+x)-x/(1+x)$，$F(0)=0$，$F'=x/(1+x)^2>0$。 易错点　第二问取 $1/n$，不是取 n。
2006 年 册页 100 第 31 题 12-3	证明 $x>0$ 时的对数下界 差函数、单调性	将照片所示两边相减，取 $F(x)=\ln(1+x)-x+x^2/2$，$F(0)=0$，$F'(x)=1/(1+x)-1+x=x^2/(1+x)>0$，故不等式成立。 易错点　严格性来自 $x>0$。

13　方程实根、交点个数与参数范围

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 4 第 24 题 主 13-3；配合或备用 13-2	e^x-ex 的单调、凹凸与水平交点 分支值域、根数	$f'=e^x-e$ 在 1 由负变正，$f(1)=0$ 为极小； 易错点　最低点只计一次。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2021 年 册页 10 第 24 题 主 13-3；配合或备用 13-2	$x\ln x$ 的右极限、单调与恰一根 分支值域、根数	在 0^+，写成 $\ln x/(1/x)$ 用洛必达得 0。 易错点　$x=0$ 不在定义域。
2020 年 册页 16 第 24 题 主 13-3；配合或备用 13-2	xe^{-x} 的定义域、单调与两交点 分支值域、根数	定义域为 $\mathbb{R}$。 易错点　在 $m=0$ 只有 $x=0$ 一根。
2019 年 册页 22 第 24 题 主 13-3；配合或备用 13-1、13-2	$2\ln x-x^2+2=0$ 的根数 分支值域、根数	定义域 $x>0$，导数 $2/x-2x$ 在 1 左正右负。 易错点　存在性和唯一性都应说明。
2018 年 册页 27 第 23 题 主 13-4；配合或备用 13-3	由曲线的几何性态判断与斜直线的交点数 差函数、根附近符号	先由原式排除分母零点，分别用 f'、f'' 划分升降与弯曲区间及作图，再令 $h=f-\ell$ 数其零点。 易错点　交的是斜直线，直接数 f 的水平交点会答错。
2017 年 册页 29 第 4 题 13-1	$x^3=1-x$ 至少一根的区间 介值性、零点	构造 $h=x^3+x-1$，有 $h(0)=-1,h(1)=1$，连续性保证 $(0,1)$ 有根。 易错点　先移到同一边。
2017 年 册页 34 第 24 题 主 13-3；配合或备用 13-2	$2x^3-3kx^2+1$ 的区间最值及三实根 分支值域、根数	$f'=6x(x-k)$； 易错点　$k=1$ 的重根只算一个不同实根。
2015 年 册页 42 第 10 题 主 13-4；配合或备用 13-1	三次多项式的最小实根与该点导数 差函数、根附近符号	首项系数为正且左端趋 $-\infty$。 易错点　左边无零点与左边值为负要分别说明。
2014 年 册页 52 第 25 题 主 13-1；配合或备用 13-4	连续且 $f(x)\neq x$，能否同时在直线上下 介值性、零点	设 $h=f-x$，连续且无零点。 易错点　比较的是 $f(x)-x$ 的符号。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2012 年 册页 64 第 31 题 主 13-1；配合或备用 13-2	证明 $2x-\int_0^x f(t)\,dt=1$ 恰有一根 介值性、零点	设 $h=2x-\int_0^x f-1$。 易错点　导数的严格正性与端点异号各有用途。
2009 年 册页 82 第 31 题 13-1	方程 $e^x+1=4x^2$ 的正实根 介值性、零点	令 $h=e^x+1-4x^2$，则 $h(0)=2>0$，$h(1)=e-3<0$，所以 $(0,1)$ 至少有一根。 易错点　该题只需证明在给定区间存在。

14　原函数与不定积分

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 1 第 7 题 14-4	由 $\int f(x)\,dx=3/x+C$ 求 f 原函数关系、求导验算	两边求导，$f(x)=-3/x^2$，$x\neq 0$。 易错点　常数求导为零。
2022 年 册页 3 第 20 题 14-2	$\int xe^{x^2+3}\,dx$ 换元、微分配对	令 $u=x^2+3$，$du=2x\,dx$，结果 $\frac{1}{2}e^{x^2+3}+C$。 易错点　补偿系数为 $1/2$。
2021 年 册页 6 第 8 题 主 14-2；配合或备用 14-4	已知 $\int f(x)\,dx=xe^x+C$，求 $\int f(2x)\,dx$ 换元、微分配对	原函数取 $F(t)=te^t$。 易错点　内参加倍时要除以 2。
2021 年 册页 6 第 11 题 主 14-1；配合或备用 14-2	$\int(\sin x+\cos x)^2\,dx$ 基本积分、恒等变形	先化为 $1+\sin 2x$，逐项积分得 $x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$。 易错点　平方有交叉项。
2020 年 册页 12 第 8 题 主 14-2；配合或备用 14-1	$\int \cot x\,dx$ 换元、微分配对	用 $\cot x=\cos x/\sin x$，令 $u=\sin x$，得 $\ln\lvert\sin x\rvert+C$。 易错点　在不穿过零点的区间内写原函数。
2020 年 册页 14 第 20 题 14-2	$\int \sin(2x-1)\,dx$ 换元、微分配对	令 $u=2x-1$，有 $dx=du/2$，得 $-\frac{1}{2}\cos(2x-1)+C$。 易错点　正弦的原函数有负号。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2019 年 册页 17 第 6 题 14-4	$d\left(\int F(x)\,dx\right)$ 原函数关系、求导验算	若 $G'=F$，则 $d(G+C)=F(x)\,dx$。 易错点　题目要求微分，包含 dx。
2019 年 册页 18 第 15 题 主 14-2；配合或备用 14-1	$\int e^{-x}\,dx$ 换元、微分配对	令 $u=-x$ 或直接验导，得 $-e^{-x}+C$。 易错点　容易漏外面的负号。
2019 年 册页 20 第 20 题 14-3	$\int x\ln(x/2)\,dx$ 分部积分	取 $u=\ln(x/2)$、$dv=x\,dx$，得 $\frac{x^2}{2}\ln(x/2)-\int x/2\,dx=\frac{x^2}{2}\ln(x/2)-x^2/4+C$，$x>0$。 易错点　对数求导是 $1/x$。
2018 年 册页 23 第 7 题 14-4	两个原函数 F,G 的关系 原函数关系、求导验算	在同一连通区间内 $(F-G)'=0$，由中值定理差为常数，$F=G+C$。 易错点　不连通的各段可取不同常数。
2018 年 册页 24 第 15 题 14-1	$\int 1\,dx$ 基本积分、恒等变形	x 的导数为 1，所以 $\int 1\,dx=x+C$。 易错点　与 $\int x\,dx$ 区分。
2018 年 册页 25 第 19 题 主 14-2；配合或备用 14-1	$\int(2x+1)^2\,dx$ 换元、微分配对	令 $u=2x+1$，得 $u^3/6+C=(2x+1)^3/6+C$。 易错点　换元留下 $1/2$ 因子。
2017 年 册页 29 第 7 题 主 14-2；配合或备用 14-4	已知原函数 xe^x，积分中换为 $f(2x)$ 换元、微分配对	令 $u=2x$，得 $\frac{1}{2}\int f(u)\,du=xe^{2x}+C$。 易错点　对比两卷时按表达式核对，选项字母会变。
2015 年 册页 41 第 7 题 14-4	由 $\int f(x)\,dx=\sin x+C$ 求 f 原函数关系、求导验算	已知原函数是正弦，求导得 $f(x)=\cos x$。 易错点　区分正弦求导和积分。
2014 年 册页 47 第 7 题 14-4	由 $\int f(x)\,dx=e^{2x}+C$ 求 f 原函数关系、求导验算	对右侧链式求导，得到 $f(x)=2e^{2x}$。 易错点　不能漏因子 2。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2013 年 册页 53 第 7 题 14-4	$\ln x$ 是 f 的原函数，求 f' 原函数关系、求导验算	求一次得 $f=1/x$，再求得 $f'=-1/x^2$，$x>0$。 易错点　题问的是被积函数的导数。
2013 年 册页 56 第 25 题 14-3	$\int x\cos 2x\,dx$ 分部积分	令 $u=x$，$dv=\cos 2x\,dx$，结果 $\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$。 易错点　两次积分的系数都为 $1/2$。
2012 年 册页 60 第 17 题 14-3	$\int \ln x\,dx$ 分部积分	将 dx 作 dv，有 $x\ln x-\int x(1/x)\,dx=x\ln x-x+C$。 易错点　对数独自出现也能分部。
2012 年 册页 62 第 25 题 主 14-2；配合或备用 14-1	$\int \cos^2 x\sin^3 x\,dx$ 换元、微分配对	把 $\sin^3 x$ 写成 $(1-\cos^2 x)\sin x$，取 $u=\cos x$。 易错点　$du=-\sin x\,dx$ 有负号。
2011 年 册页 66 第 8 题 14-4	微分、求导与不定积分等式辨析 原函数关系、求导验算	若 $G'=f$，则 $(\int f\,dx)'=f$。 易错点　积分常数与 dx 的位置都有含义。
2011 年 册页 68 第 25 题 主 14-2；配合或备用 14-1	$\int \sqrt{1-x}/x\,dx$ 换元、微分配对	令 $t=\sqrt{1-x}$，则被积式化 $-2t^2/(1-t^2)\,dt$，即 $[2-2/(1-t^2)]dt$。 易错点　原定义域跨不过 $x=0$。
2010 年 册页 71 第 6 题 14-4	由 $\int xf(x)\,dx=e^{-x^2}+C$ 求 f 原函数关系、求导验算	先求得 $xf(x)=-2xe^{-x^2}$，在 $x\neq 0$ 有 $f(x)=-2e^{-x^2}$。 易错点　除去的 $x=0$ 要单独讨论。
2010 年 册页 72 第 17 题 主 14-1；配合或备用 14-4	$\int dF(x)$ 基本积分、恒等变形	由 $dF=F'(x)dx$ 得 $F(x)+C$。 易错点　不定积分保留常数。
2010 年 册页 74 第 25 题 主 14-3；配合或备用 14-1	$\int x^2\arctan x\,dx$ 分部积分	用 $u=\arctan x, dv=x^2dx$ 得 $x^3\arctan x/3-\frac{1}{3}\int x^3/(1+x^2)\,dx$。 易错点　积分剩余有理式要先除法。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2009 年 册页 77 第 7 题 14-4	已知 f 的原函数为 $\arctan x$，求 f' 原函数关系、求导验算	先得 $f=1/(1+x^2)$，再得 $f'=-2x/(1+x^2)^2$。 易错点　要求两次导数。
2009 年 册页 80 第 25 题 主 14-2；配合或备用 14-4	含 $\sqrt{4-x^2}$ 的三角换元 换元、微分配对	由 $\int dx/[x^2\sqrt{4-x^2}]$，令 $x=2\sin t$（$\cos t>0$），化为 $\frac{1}{4}\int \csc^2 t\,dt$。 易错点　$x=0$ 是禁点，回代时保留符号。
2008 年 册页 86 第 25 题 主 14-3；配合或备用 14-1	$\int e^{2x}\sin x\cos x\,dx$ 分部积分	先用 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$。 易错点　把移回的积分项与原系数区分。
2007 年 册页 90 第 7 题 14-4	已知 e^{x^2} 是 f 的原函数，求 f' 原函数关系、求导验算	$f=2xe^{x^2}$，再用乘积法则得 $f'=2(1+2x^2)e^{x^2}$。 易错点　求的是原函数的二阶导。
2007 年 册页 92 第 24 题 主 14-2；配合或备用 14-4	$\int \arcsin\sqrt{x}/\sqrt{x(1-x)}\,dx$ 换元、微分配对	令 $u=\arcsin\sqrt{x}$，$du=dx/[2\sqrt{x(1-x)}]$，化为 $2\int u\,du=u^2+C$，$0<x<1$。 易错点　别漏掉 2。
2006 年 册页 96 第 8 题 14-4	由原函数 $\ln(kx)$ 选被积函数 原函数关系、求导验算	在 $kx>0$ 的区间上，链式求导得 $k/(kx)=1/x$。 易错点　k 的符号影响定义域，但约分后导数形式不变。
2006 年 册页 96 第 16 题 14-4	已知 $\int f(x)\,dx=\sin(2x-1)+C$ 原函数关系、求导验算	对右端求导，得 $f(x)=2\cos(2x-1)$。 易错点　别丢掉内层系数。
2006 年 册页 98 第 25 题 14-1	含平方根和立方根比值的幂积分 基本积分、恒等变形	题面为常数 e 乘 $\sqrt[3]{x}/\sqrt{x}$，在 $x>0$ 化为 $ex^{-1/6}$，积分为 $(6e/5)x^{5/6}+C$。 易错点　把两种根式先化为分数指数。

15　定积分性质与计算

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 2 第 14 题 主 15-4；配合或备用 15-1	对称区间上的有理式 奇偶性、对称区间	$(x^3+2x^2+2)/(1+x^2)=2+x^3/(1+x^2)$，后一项奇对称积分为零，第一项积分为 4。 易错点　奇偶性作用于拆出的两项。
2022 年 册页 2 第 15 题 主 15-5；配合或备用 15-1	分段函数 $\int_0^2 f(x)\,dx$ 分段、绝对值或有向面积	以 1 为界，计算 $\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2x+1)dx=1/3+4=13/3$。 易错点　端点采用哪支不改变积分值。
2021 年 册页 8 第 20 题 主 15-2；配合或备用 15-1	$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx$ 换元、积分限	以 $u=3x+1$ 换元，上下限变为 $1,4$，得 $\frac{1}{3}[\frac{2}{3}u^{3/2}]_1^4=14/9$。 易错点　换元时上下限同时改。
2020 年 册页 12 第 15 题 15-4	$\int_{-1}^1 \sin x\sqrt{1-x^2}\,dx$ 奇偶性、对称区间	正弦为奇函数，根式为偶，乘积奇且区间对称，积分为零。 易错点　区间若不对称，就不能这样消去。
2019 年 册页 18 第 8 题 主 15-4；配合或备用 15-1	$\int_{-1}^1 19x^{18}(1-\sin x)\,dx$ 奇偶性、对称区间	展开后 $19x^{18}\sin x$ 为奇项，剩下 $[x^{19}]_{-1}^1=2$。 易错点　偶项不能随奇项一起消去。
2018 年 册页 26 第 20 题 主 15-1；配合或备用 15-3	由 $x\ln x-x$ 的微分计算 $\int_1^e \ln x\,dx$ 牛顿–莱布尼茨公式	第（1）问 $dy=\ln x\,dx$。 易错点　两个小问的承接是直接识别原函数。
2017 年 册页 30 第 15 题 15-4	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$ 奇偶性、对称区间	x^2 偶、$\sin x$ 奇，因此积分为零。 易错点　端点相反是必要识别信号。
2017 年 册页 32 第 20 题 主 15-2；配合或备用 15-1	$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ 换元、积分限	以 $u=2x+1$ 换元，得 $\frac{1}{2}[\frac{2}{3}u^{3/2}]_1^9=26/3$。 易错点　上限 4 换成 9。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2016 年 册页 36 第 8 题 主 15-4；配合或备用 15-2	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \, dx$ 奇偶性、对称区间	被积函数为奇函数，故得零。 易错点　奇函数不必逐项积分。
2016 年 册页 36 第 14 题 15-5	根据三个阴影面积求有向积分 分段、绝对值或有向面积	原图由左到右分别在轴上、轴下、轴上，几何面积为 $2, 3, 4$。 易错点　轴下区块贡献负值。
2016 年 册页 38 第 20 题 主 15-3；配合或备用 15-1	$\int_0^1 x e^x \, dx$ 定积分分部	取 $u = x, dv = e^x \, dx$，得 $[(x-1)e^x]_0^1 = 1$。 易错点　下限代入为 -1，总式要减去。
2015 年 册页 42 第 14 题 主 15-4；配合或备用 15-1	$\int_{-1}^{1} (2\sin(x^5) + 3) \, dx$ 奇偶性、对称区间	$\sin(x^5)$ 为奇函数，故只余常数积分 $3 \cdot 2 = 6$。 易错点　奇性来自内外都为奇函数。
2015 年 册页 43 第 20 题 主 15-2；配合或备用 15-1	$\int_1^e (1 + \ln x)/x \, dx$ 换元、积分限	令 $t = \ln x$，积分化为 $\int_0^1 (1+t) dt = 3/2$。 易错点　分母 x 已包含在 dt 中。
2014 年 册页 48 第 14 题 15-4	$\int_{-1}^{1} x \cos x \, dx$ 奇偶性、对称区间	乘积为奇函数，积分为零。 易错点　不要把 $\cos x$ 当成奇函数。
2014 年 册页 49 第 19 题 主 15-2；配合或备用 15-1	$\int_0^1 dx/(1+\sqrt{x})$ 换元、积分限	令 $t = \sqrt{x}$，化为 $\int_0^1 2t/(1+t)\, dt = [2t - 2\ln(1+t)]_0^1 = 2 - 2\ln 2$。 易错点　$dx = 2t \, dt$。
2013 年 册页 54 第 18 题 主 15-4；配合或备用 15-1	$\int_{-1}^{1} (5\sin^{2013} x - 2\tan x + 3) \, dx$ 奇偶性、对称区间	正弦的奇次幂及 $\tan x$ 都是奇函数且在区间内连续，得到常数项积分 6。 易错点　奇次幂不改变正弦奇性。
2013 年 册页 56 第 26 题 主 15-2；配合或备用 15-1	$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx$ 换元、积分限	换 $u = 1 - x^2$，积分为 $\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u} \, du = 1/3$。 易错点　换元后上下限次序相反，与微分负号抵消。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2012 年 册页 60 第 18 题 主 15-4；配合或备用 15-1	$\int_{-1}^{1}(x^2+x\tan^2 x)\,dx$ 奇偶性、对称区间	$x\tan^2 x$ 为奇项，故只求 $[x^3/3]_{-1}^{1}=2/3$。 易错点　平方使正切因子成为偶函数。
2012 年 册页 62 第 26 题 主 15-2；配合或备用 15-1	$\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$ 换元、积分限	令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $dx=2t/(1+t^2)dt$，上下限 $0,1$，积分为 $2[t-\arctan t]_0^1=2-\pi/2$。 易错点　同时变根式、微分和上下限。
2011 年 册页 66 第 16 题 主 15-5；配合或备用 15-1	$\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$ 分段、绝对值或有向面积	先化成 $\sqrt{2}\lvert\cos x\rvert$，于 $\pi/2$ 分段，得 $2\sqrt{2}$。 易错点　$\sqrt{\cos^2 x}$ 带绝对值。
2011 年 册页 66 第 18 题 主 15-4；配合或备用 15-1	三项混合积分的奇偶性 奇偶性、对称区间	$e^{x^2}\tan x$ 与 $(\arcsin x)^3$ 为奇函数，$[-1,1]$ 上积分为零，常数 3 的积分为 6。 易错点　先逐项查对称性。
2011 年 册页 68 第 26 题 主 15-3；配合或备用 15-2	$\int_{0}^{3}\arctan\sqrt{x}\,dx$ 定积分分部	用 $t=\sqrt{x}$ 得 $\int_0^{\sqrt{3}}2t\arctan t\,dt$。 易错点　反正切上限是 $\sqrt{3}$。
2010 年 册页 72 第 18 题 主 15-5；配合或备用 15-1	$\int_{-2}^{4}\lvert x\rvert\,dx$ 分段、绝对值或有向面积	在 $x=0$ 拆为两三角形面积 2 与 8，总和 10。 易错点　右侧比左侧更长，不能直接翻倍。
2010 年 册页 74 第 26 题 主 15-2；配合或备用 15-1	根式分母的定积分 换元、积分限	原分母为 $\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}$。 易错点　把第二项看成 t^3。
2009 年 册页 78 第 18 题 主 15-5；配合或备用 15-4	$\int_{0}^{2\pi}\lvert\sin x\rvert\,dx$ 分段、绝对值或有向面积	在 π 分段，第二段用 $-\sin x$，两段积分分别为 2，合计 4。 易错点　绝对值改变第二段的符号。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2009 年 册页 80 第 26 题 主 15-3；配合或备用 15-1	$\int_0^{1/2} \arccos x \, dx$ 定积分分部	分部得到原函数 $x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$，上下限代入为 $\pi/6 + 1 - \sqrt{3}/2$。 易错点　反余弦的导数带负号。
2008 年 册页 84 第 9 题 15-4	从四个对称积分中找零值 奇偶性、对称区间	$\arcsin x$ 奇且 e^{x^2} 偶，乘积为奇，对称区间积分为零。 易错点　只有被积项与区间同时符合才可判零。
2008 年 册页 84 第 18 题 主 15-5；配合或备用 15-1	$\int_0^{\pi/2} \left\lvert \frac{1}{2} - \sin x \right\rvert dx$ 分段、绝对值或有向面积	分界为 $\pi/6$。积分为 $\int_0^{\pi/6}(\frac{1}{2}-\sin x)dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2}(\sin x - \frac{1}{2})dx = \sqrt{3} - 1 - \pi/12$。 易错点　分段时要在两边试符号。
2008 年 册页 86 第 26 题 主 15-1；配合或备用 15-2	$\int_1^{\sqrt{3}} x/\sqrt{x^2+1}\, dx$ 牛顿–莱布尼茨公式	识别为 $\sqrt{x^2+1}$ 的导数，结果 $2-\sqrt{2}$。 易错点　根号覆盖整个 x^2+1。
2007 年 册页 90 第 15 题 主 15-5；配合或备用 15-2	$4\int_0^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2}\, dx$ 分段、绝对值或有向面积	根式是半径为 π 的圆的上半支； 易错点　区分半径 π 与圆周率系数。
2007 年 册页 90 第 18 题 15-4	$\int_{-1}^{1}[f(x) - f(-x)]dx$ 奇偶性、对称区间	被积式换 $x \mapsto -x$ 后变成其负值，故奇对称积分为零。 易错点　不需要 f 本身有奇偶性。
2007 年 册页 92 第 26 题 主 15-3；配合或备用 15-1	$\int_0^1 xe^x\, dx$ 定积分分部	取 $dv = e^x dx$，原函数是 $(x-1)e^x$，上下限相减为 1。 易错点　误把下限值当零会得错。
2006 年 册页 96 第 9 题 15-4	四个候选定积分择零 奇偶性、对称区间	$\arcsin x$ 奇、e^{-x^2} 偶，乘积在 $[-1,1]$ 上积分为零。 易错点　绝对值的幂为偶对称。
2006 年 册页 96 第 19 题 主 15-5；配合或备用 15-1	$\int_0^3 \lvert 1 - x \rvert\, dx$ 分段、绝对值或有向面积	在 1 拆为面积 $1/2$ 和 2，结果 $5/2$。 易错点　分界不是积分区间的中点。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2006 年 册页 98 第 26 题 主 15-5；配合或备用 15-1	分段计算 $\int_0^2 f(x)\,dx$ 分段、绝对值或有向面积	分界为 1，计算 $\int_0^1 x\,dx+\int_1^2(x^2+1)dx=1/2+10/3=23/6$。 易错点　只按分段式选被积表达式。

16　变上限积分及其求导

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2019 年 册页 18 第 14 题 16-1	$F(x)=\int_0^x(1+t^2)^{-1}dt$ 求导 基本定理、变上限	上下限中只有 x 变化，被积函数连续，故 $F'(x)=1/(1+x^2)$。 易错点　积分哑变量 t 要替换成上限。
2018 年 册页 24 第 8 题 16-1	$f(x)=\int_0^x\cos(t^2)dt$ 求 f' 基本定理、变上限	用基本定理得 $\cos(x^2)$。 易错点　$\cos(t^2)$ 与 $(\cos t)^2$ 不同。
2017 年 册页 30 第 14 题 主 16-4；配合或备用 16-1	$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos t\,dt}{x}$ 积分函数、差商或洛必达	设积分为 $F(x)$，则 $F(0)=0$，原式是 F 在零点的差商，极限为 $F'(0)=\cos0=1$。 易错点　分子可以先精确积分作备用。
2015 年 册页 42 第 16 题 主 16-3；配合或备用 16-2	$\Phi(x)=\int_0^x(x-t)\cos t\,dt$ 求导 被积项带参数、分段	拆成 $x\int_0^x\cos t\,dt-\int_0^x t\cos t\,dt$。 易错点　外层 x 也需要求导。
2013 年 册页 54 第 17 题 16-1	$f(x)=\int_0^x\cos(t^2)dt$ 在 $\sqrt{\pi}$ 的导数 基本定理、变上限	先得 $f'(x)=\cos(x^2)$，再代 $\sqrt{\pi}$ 得 $\cos\pi=-1$。 易错点　别把指定的点代到积分上限后再求导。
2012 年 册页 59 第 7 题 主 16-2；配合或备用 16-1	$\frac{d}{dx}\int_0^{2x}\sin t\,dt$ 链式、端点方向	先把 $2x$ 代作被积函数输入，再乘上限导数 2，得 $2\sin2x$。 易错点　不能省链式系数。
2011 年 册页 67 第 22 题 主 16-4；配合或备用 16-1	用导数算 $\int_0^x(t-\sin t)dt$ 与 $e^{x^4}-1$ 的商极限 积分函数、差商或洛必达	分子分母趋零，洛必达得 $(x-\sin x)/(4x^3e^{x^4})$。 易错点　指数为 x^4，导数产生 $4x^3$。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2010 年 册页 71 第 7 题 16-2	$d(\int_a^b \cos(x^2)\,dx)$，上下限均是常数 链式、端点方向	把积分变量换名为 t 可见积分量恒定，因此微分为零。 易错点　哑变量的名字不使常数积分变成函数。
2010 年 册页 73 第 22 题 主 16-4；配合或备用 16-1	$\lim_{x\to 0^+}\int_0^x \ln(t+e^t)dt/(1-\cos x)$ 积分函数、差商或洛必达	先洛必达得 $\ln(x+e^x)/\sin x$。 易错点　先确认对数在趋近点附近有定义。
2009 年 册页 78 第 21 题 主 16-4；配合或备用 16-1	$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x(\arctan t)^2dt/\sqrt{1+x^2}$ 积分函数、差商或洛必达	在 $t\ge 1$ 时被积函数至少为 $(\pi/4)^2$，分子确趋无穷。 易错点　验证分子发散后再用无穷比形式。
2008 年 册页 83 第 8 题 16-2	$\int_1^{2x} f(t/3)dt$ 在 $x=6$ 的导数 链式、端点方向	按链式求导得 $2f(2x/3)$，在 6 时为 $2f(4)$。 易错点　被积函数发生缩放，上限也发生缩放。
2007 年 册页 90 第 8 题 16-3	两段常数定义的积分函数 被积项带参数、分段	当 $1\le x\le 2$，$\phi(x)=\int_0^1 1\,dt+\int_1^x 2\,dt=2x-1$。 易错点　上限超过分界时，前一段积分仍要累计。
2007 年 册页 91 第 21 题 主 16-4；配合或备用 16-2	两个变上限积分构成的比值极限 积分函数、差商或洛必达	先逐项核对上下限、幂次与趋向点，再判未定式； 易错点　不按相似经典题补写指数。
2006 年 册页 96 第 17 题 主 16-4；配合或备用 16-1	$\lim_{x\to 0}\int_0^x \sin t\,dt/(\cos x-1)$ 积分函数、差商或洛必达	直接积分分子为 $1-\cos x$，在去心邻域商恒为 -1，所以极限为 -1。 易错点　分母顺序与分子相反。

17　广义积分的计算与敛散判定

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2016 年 册页 36 第 15 题 主 17-1；配合或备用 17-2	$\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$ 异常端、单侧极限	左端是瑕点。取 $\varepsilon>0$，积分为 $[2\sqrt{x}]_\varepsilon^1$，令 $\varepsilon\downarrow 0$ 得 2。 易错点　被积函数趋无穷不等于积分发散。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2015 年 册页 42 第 15 题 17-1	$\int_{-\infty}^{1} e^{x}\,dx$ 异常端、单侧极限	令下限 $a \to -\infty$，$[e^{x}]_{a}^{1} = e - e^{a} \to e$。 易错点　这里无穷端在下限。
2014 年 册页 48 第 15 题 17-1	$\int_{0}^{+\infty} dx/(1+x^{2})$ 异常端、单侧极限	原函数 $\arctan x$，取有限上限 R 后令 $R \to +\infty$，得 $\pi/2$。 易错点　无穷远取极限而非直接代入原函数的变量。
2013 年 册页 53 第 8 题 主 17-2；配合或备用 17-1	求 $\int_{2}^{\infty} x^{-k}dx$ 发散的 k 幂积分、敛散	$k=1$ 时原函数为 $\ln x$，发散。 易错点　临界 $k=1$ 要单列。
2012 年 册页 59 第 8 题 17-1	$\int_{0}^{\infty} dx/(1+x^{2})$ 异常端、单侧极限	①找出所有无穷端和瑕点，并在有限普通点分段。②每一段以有限端点做普通积分。③各自取单侧极限，全部有限才合并。 易错点　核对题列所问是值还是敛散。
2011 年 册页 66 第 17 题 17-1	$\int_{-\infty}^{+\infty} dx/(x^{2}+4x+5)$ 异常端、单侧极限	配方 $(x+2)^{2}+1$。 易错点　两端各自收敛才能相加。
2010 年 册页 71 第 8 题 主 17-1；配合或备用 17-2	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x}/(1+e^{2x})\,dx$ 异常端、单侧极限	令 $u=e^{x}$，分别处理两端后化成 $\int_{0}^{\infty} du/(1+u^{2}) = \pi/2$。 易错点　$x \to -\infty$ 对应 $u \to 0^{+}$。
2007 年 册页 90 第 19 题 17-1	$\int_{0}^{+\infty} dx/(1+x^{2})$ 异常端、单侧极限	用 $\lim_{R\to\infty}(\arctan R - \arctan 0) = \pi/2$。 易错点　反正切在正无穷取 $\pi/2$。

18　空间点坐标与向量运算

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 2 第 9 题 18-1	点 $(2,-3,6)$ 关于原点的对称点 坐标对称	三坐标都反号，得 $(-2,3,-6)$。 易错点　与关于某个坐标面的对称区分。
2021 年 册页 6 第 10 题 18-2	$A(2,1,0), B(1,-1,2)$ 的距离 坐标差、距离	坐标差为 $(-1,-2,2)$，模为 $\sqrt{1+4+4}=3$。 易错点　平方后各项非负。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2019 年 册页 18 第 9 题 18-2	$A(1,1,0), B(0,-1,2)$ 的距离 坐标差、距离	坐标差 $(-1,-2,2)$，同样得 3。 易错点　距离是差向量的模。
2018 年 册页 24 第 9 题 18-1	$(1,0,-1)$ 与 $(1,0,1)$ 的对称关系 坐标对称	只有 z 分量反号，故关于 xy 坐标面对称。 易错点　两点都在 $y=0$ 内不表示关于 y 轴对称。
2017 年 册页 30 第 16 题 18-3	$(1,k,1)$ 与 $(1,0,k)$ 垂直 点积、模与垂直	由点积 $1+k=0$ 得 $k=-1$。 易错点　用点积而非叉积。
2016 年 册页 36 第 9 题 主 18-4；配合或备用 18-5	两个非零向量平行的充要条件 叉积、模与方向	由 $\lvert\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rvert=\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\sin\theta$，平行当且仅当叉积为零。 易错点　反向共线仍是平行。
2015 年 册页 42 第 8 题 18-1	$(1,2,3)$ 关于 x 轴的点 坐标对称	保留 x，反转 y,z，得 $(1,-2,-3)$。 易错点　轴对称保留沿轴的分量。
2014 年 册页 48 第 8 题 18-3	判断与 $(1,-2,1)$ 垂直的候选向量 点积、模与垂直	与 $(1,1,1)$ 的点积为 $1-2+1=0$，故选该向量。 易错点　按对应分量相乘。
2013 年 册页 53 第 9 题 18-1	$(1,1,-1)$ 关于原点的对称点 坐标对称	全坐标变号后得到 $(-1,-1,1)$。 易错点　负坐标取反变正。
2012 年 册页 60 第 10 题 18-3	已知模和夹角，求 $\lvert2\mathbf{a}-3\mathbf{b}\rvert$ 点积、模与垂直	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2\cdot3\cos(\pi/3)=3$，模平方 $4\cdot4+9\cdot9-12\cdot3=61$，故为 $\sqrt{61}$。 易错点　最后开平方。
2011 年 册页 66 第 9 题 18-1	$(-1,2,-3)$ 与 $(1,2,-3)$ 的对称关系 坐标对称	仅 x 变号，故关于 yz 坐标面对称。 易错点　另两个坐标保持原值。
2011 年 册页 66 第 20 题 18-4	求 $\lvert(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\rvert$ 叉积、模与方向	展开得 $3(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$。 易错点　叉积交换因子变号。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2010 年 册页 72 第 20 题 主 18-5；配合或备用 18-4	$(1,3,-2)$ 与 $(2,6,\lambda)$ 平行 比例、共线	前两分量给比例 2，第三分量应为 -4，所以 $\lambda=-4$。 易错点　比例须对同一向量乘同一个数。
2009 年 册页 77 第 9 题 18-1	$(1,2,3)$ 与 $(1,-2,3)$ 的对称面 坐标对称	仅 y 变号，故关于 xOz 面对称。 易错点　用被翻转的坐标辨认坐标面。
2009 年 册页 78 第 19 题 18-3	求 $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ 点积、模与垂直	由模 $2,1$ 和夹角 $\pi/3$ 得 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1$。 易错点　点积中交叉项系数合并为 -1。
2008 年 册页 84 第 19 题 18-3	$(1,2,-1)$ 与 $(2,1,k)$ 垂直 点积、模与垂直	点积 $2+2-k=0$，解得 $k=4$。 易错点　第三项为 $-k$。
2007 年 册页 90 第 16 题 18-4	已知 $\lvert\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rvert=3$ 的叉积组合 叉积、模与方向	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})=-2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$，取模得 6。 易错点　取模后系数的负号消失。

19　空间直线、平面及位置关系

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 3 第 21 题 主 19-1；配合或备用 19-2	过 $A(1,1,-1)$ 求平行线及垂直平面 点方向式、方向向量	给定直线方向 $\mathbf{d}=(1,2,1)$。 易错点　同一向量在两个小问中扮演不同角色。
2021 年 册页 8 第 19 题 主 19-1；配合或备用 19-2	过 A,B 的直线及过 A 的垂直平面 点方向式、方向向量	$A(2,1,1),B(3,3,4)$，$\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$。 易错点　平面用同一方向作法向量。
2020 年 册页 12 第 9 题 19-4	点 $M(1,-1,2)$ 到 $-2x+y-2z+1=0$ 点面距离、法向量	代入得分子 $\lvert-2-1-4+1\rvert=6$，法向量模 3，距离 2。 易错点　分子要取绝对值。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2020 年 册页 15 第 21 题 主 19-1；配合或备用 19-2	给定参数直线与点，求平行线及垂直平面 点方向式、方向向量	从参数系数取 $\mathbf{d}=(4,-1,2)$，过 $M(3,-1,1)$ 的直线为 $M+t\mathbf{d}$，垂直平面为 $4x-y+2z-15=0$。 易错点　常数项提供过点，参数系数才给方向。
2019 年 册页 20 第 21 题 主 19-1；配合或备用 19-2	由两点求直线与垂直平面 点方向式、方向向量	从 $A(1,-1,0),B(2,1,1)$ 得 $\mathbf{d}=(1,2,1)$。 易错点　检查平面常数由哪个过点决定。
2018 年 册页 24 第 16 题 19-2	$(k,1,0)$ 垂直于 xz 坐标面 点法式、法向量	xz 面的法向量为 $(0,1,0)$，给定向量与之共线须 $k=0$。 易错点　垂直于面意味着平行于法向量。
2018 年 册页 26 第 21 题 19-2	先算向量再写平面方程 点法式、法向量	$\mathbf{n}=2(3,0,-1)-(2,-1,1)=(4,1,-3)$； 易错点　末坐标的法向量系数为负。
2017 年 册页 30 第 8 题 19-2	辨认 $x=0$ 的空间几何图形 点法式、法向量	所有 x 坐标为零的点 $(0,y,z)$ 构成 yOz 平面。 易错点　两个坐标可独立变化，所以不是轴。
2017 年 册页 32 第 21 题 19-3	求参数直线与平面的交点 线面关系、交点	令直线上点为 $(1+2t,2+3t,-1+t)$，代入 $x+2y-4z+7=0$ 得 $16+4t=0$，点为 $(-7,-10,-5)$。 易错点　把求得的参数代回三个坐标。
2016 年 册页 36 第 16 题 19-3	两空间直线垂直反求 k 线面关系、交点	两方向 $(2k,k+2,-5)$、$(3,1,k)$ 的点积为 $2k+2$，故 $k=-1$。 易错点　用方向向量的点积。
2016 年 册页 37 第 18 题 19-2	过 $(1,-1,2)$ 且垂直于直线的平面 点法式、法向量	直线方向 $(1,2,-1)$ 为所求平面法向量，点法式化简为 $x+2y-z+3=0$。 易错点　取方向向量作法向量。
2015 年 册页 44 第 21 题 主 19-3；配合或备用 19-2	过线面交点且与给定线垂直的平面 线面关系、交点	直线 $(2+t,3+2t,t)$ 代入 $2x+y+z-2=0$，得 $t=-1$、交点 $(1,1,-1)$。 易错点　交点与所求法向量来自不同步骤。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2014 年 册页 50 第 21 题 19-2	过 C 且垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 的平面 点法式、法向量	$A(-1,1,2), B(1,-1,1)$ 给 $\overrightarrow{AB}=(2,-2,-1)$，以此为法向量并代 $C(2,0,2)$，得 $2x-2y-z-2=0$。 易错点　方程经过 C 而非默认经过 A。
2013 年 册页 54 第 19 题 19-4	$(1,-1,0)$ 到 $2x+2y-z-6=0$ 点面距离、法向量	代入绝对值 6，法向量模 3，距离 2。 易错点　分母包含三个法向分量。
2013 年 册页 56 第 27 题 19-2	同时垂直于两个已知平面的平面 点法式、法向量	两法向量 $(5,-2,6)$、$(3,-1,2)$ 叉积为 $(2,8,1)$，这也是所求平面的法向量。 易错点　平面互相垂直时法向量也互相垂直。
2012 年 册页 60 第 20 题 19-1	过 $(-1,2,1)$ 且平行于两平面的交线 点方向式、方向向量	取 $(2,1,0)\times(0,1,2)=(2,-4,2)$，方向可约为 $(1,-2,1)$，所求为 $(-1,2,1)+t(1,-2,1)$。 易错点　叉积用于给交线定方向。
2012 年 册页 62 第 27 题 主 19-5；配合或备用 19-1	直线在 $x+y+z=0$ 上的正投影 正投影、法向分量	联立原两平面得直线过 $P=(0,1,0)$、方向 $\mathbf{d}=(0,1,1)$。 易错点　点和方向都要投影。
2011 年 册页 69 第 28 题 19-2	过 $(1,-2,3)$ 且平行于两条直线的平面 点法式、法向量	两方向 $(2,-1,3)$ 和 $(3,2,-1)$ 的叉积为 $(-5,11,7)$，代点得 $-5x+11y+7z+6=0$。 易错点　得到平面后可再用代入检查平行关系。
2010 年 册页 71 第 9 题 19-3	$L:(x-2)/1=(y+1)/(-1)=(z-1)/3$ 与所给平面的位置 线面关系、交点	$\mathbf{d}=(1,-1,3)$，$\mathbf{n}=(1,-5,6)$。 易错点　相交和垂直分别判断。
2010 年 册页 75 第 28 题 主 19-3；配合或备用 19-1	过 $P=(-1,0,4)$、平行于面且与给定直线相交 线面关系、交点	设交点 $Q=(-1+t,3-t,2t)$。 易错点　题设的交点尚未知，要先参数化。
2009 年 册页 80 第 27 题 主 19-1；配合或备用 19-2	过 $(2,-1,1)$ 且平行于两平面的直线 点方向式、方向向量	法向量 $(2,-1,3)$、$(1,-3,1)$ 的叉积 $(8,1,-5)$ 给方向，所求对称式 $(x-2)/8=(y+1)/1=(z-1)/(-5)$。 易错点　用两个法向量叉积，不能直接用其一作方向。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2008 年 册页 87 第 28 题 19-2	过 $(2,-3,4)$ 且垂直于两平面的交线 点法式、法向量	交线方向 $(3,0,1)\times(0,1,2)=(-1,-6,3)$，作为新平面法向量，得 $-x-6y+3z-28=0$。 易错点　先找交线的方向。
2007 年 册页 90 第 9 题 19-3	$x=y=(z-1)/3$ 与 $x+2y-z+1=0$ 的位置 线面关系、交点	取直线上点 $(t,t,1+3t)$ 代入，恒为零。 易错点　点积为零时还要查直线上一点。
2007 年 册页 93 第 27 题 19-1	过 $M(1,2,-1)$ 的平行直线 点方向式、方向向量	由原参数式取方向 $(-1,3,1)$，所求为 $(1,2,-1)+t(-1,3,1)$。 易错点　平行线的锚点要换为指定点。
2006 年 册页 96 第 18 题 19-1	过 $(1,0,1)$ 且垂直于 $x-y+2z+1=0$ 点方向式、方向向量	用平面法向量 $(1,-1,2)$ 作直线方向，得 $(1,0,1)+t(1,-1,2)$。 易错点　垂线方向是法向量。
2006 年 册页 99 第 28 题 19-2	过 $(-1,0,3)$ 且平行于 $3x+2y-z+1=0$ 点法式、法向量	用相同法向量 $(3,2,-1)$，由指定点算常数项，得 $3x+2y-z+6=0$。 易错点　平行面一般常数项不同。

20　微分方程的阶数与类型识别

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2020 年 册页 12 第 16 题 20-1	含 xy''' 等项的微分方程判阶 阶数、最高阶导数	最高是 y'''，即三阶。 易错点　导数次数与导数阶数不同。
2018 年 册页 24 第 10 题 主 20-2；配合或备用 20-1	四式中辨认一阶可分离方程 线性、齐次或分离	$y^2dx+xdy=0$ 可写 $y'=-(1/x)y^2$，右边是 x 与 y 的因子积。 易错点　判断结构时先确定自变量。
2011 年 册页 66 第 10 题 主 20-2；配合或备用 20-1	四式中辨认二阶线性方程 线性、齐次或分离	$y''+y'+e^xy=\cos x$ 各未知量只以一次出现且系数只依赖 x。 易错点　一阶项与未知函数相乘也是非线性。
2010 年 册页 72 第 10 题 20-1	带 $(y')^2$ 及 y^3y' 的方程判阶 阶数、最高阶导数	所用导数最高只有 y'，所以是一阶。 易错点　乘幂不提高阶数。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2009 年 册页 78 第 10 题 20-1	同时含 $(dy/dx)^4$ 与 $(d^2y/dx^2)^3$ 阶数、最高阶导数	最高出现二阶导数，故为二阶。 易错点　不要选最高幂次 4。
2007 年 册页 90 第 10 题 主 20-2；配合或备用 20-1	选择一阶非齐次线性方程 线性、齐次或分离	$xy'+e^xy=x^2$ 为一阶，未知量线性，右端非零； 易错点　含 y^2 或 $(y')^2$ 的项破坏线性。

21　一阶微分方程的通解与特解

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 2 第 16 题 21-1	$y'=4x^3$，$y(0)=3$ 直接积分、初始条件	积分得 $y=x^4+C$，代入初值得 $C=3$，故 $y=x^4+3$。 易错点　初值用在积分之后。
2022 年 册页 4 第 22 题 主 21-3；配合或备用 21-2	$y'-xy=x$ 的通解 积分因子、一阶线性	写成 $(y+1)'=x(y+1)$，积分因子 $e^{-x^2/2}$ 使左端成为乘积导数，故 $y=Ce^{x^2/2}-1$。 易错点　若用分离法，常数解 -1 对应 $C=0$。
2021 年 册页 6 第 16 题 21-1	$y'=10x$，$y(1)=6$ 直接积分、初始条件	积分得 $y=5x^2+C$，代 $x=1$ 得 $C=1$，所以 $y=5x^2+1$。 易错点　初始点是 1。
2021 年 册页 9 第 22 题 主 21-3；配合或备用 21-2	$y'+y=2$ 的通解 积分因子、一阶线性	乘 e^x 后有 $(e^xy)'=2e^x$，积分并除得 $y=2+Ce^{-x}$。 易错点　齐次部分指数为负。
2020 年 册页 15 第 22 题 21-3	$y'-y=2xe^x$，$y(0)=2$ 积分因子、一阶线性	乘 e^{-x} 得 $(e^{-x}y)'=2x$，故 $y=(x^2+C)e^x$。 易错点　积分因子的指数与结果中的指数相反。
2019 年 册页 18 第 16 题 21-1	$y'=3x^2$，$y(1)=3$ 直接积分、初始条件	积分得 $y=x^3+C$，代入点值得 $C=2$。 易错点　3 不等于积分常数。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2019 年 册页 21 第 22 题 21-3	$y'-y/x=xe^x$ 的通解 积分因子、一阶线性	在 $x\neq 0$ 的区间写成 $(y/x)'=e^x$，故 $y=x(e^x+C)$。 易错点　跨不过系数的奇点。
2018 年 册页 27 第 22 题 21-2	可分离方程的初值特解 变量分离、分支	从可辨部分判断需将 y 项与 x 项分离并分别积分，再用指定初值选常数及分支。 易错点　分离后需用确认的初始点选解。
2017 年 册页 33 第 22 题 主 21-3；配合或备用 21-2	$y'+y=1$ 的通解 积分因子、一阶线性	乘 e^x 后积分 $(e^xy)'=e^x$，得 $y=1+Ce^{-x}$。 易错点　积分常数最后随 e^{-x}。
2016 年 册页 36 第 13 题 21-1	由各点切线斜率 $2x$ 和经过 $(1,2)$ 求曲线 直接积分、初始条件	写为 $y'=2x$，得 $y=x^2+C$，代点得 $y=x^2+1$。 易错点　已知的是每一点的斜率函数。
2016 年 册页 38 第 22 题 主 21-3；配合或备用 21-2	$y\,dx+(x-1)dy=0$ 积分因子、一阶线性	直接识别 $d[(x-1)y]=0$，故 $(x-1)y=C$，在 $x\neq 1$ 的区间为 $y=C/(x-1)$。 易错点　直接除以 $x-1$ 会把奇点掩盖掉。
2015 年 册页 44 第 22 题 主 21-3；配合或备用 21-2	$y'+2xy=2x$ 的通解 积分因子、一阶线性	乘 e^{x^2} 得 $(e^{x^2}y)'=2xe^{x^2}$，积分得 $y=1+Ce^{-x^2}$。 易错点　$y=1$ 是常数特解。
2014 年 册页 51 第 22 题 21-3	$y'-y/x=x^3$ 的通解 积分因子、一阶线性	把等式除以 x 化为 $(y/x)'=x^2$，故 $y=x^4/3+Cx$，$x\neq 0$。 易错点　积分后还需乘回 x。
2013 年 册页 54 第 20 题 21-2	$y'=e^{x-y}$，$y(0)=0$ 变量分离、分支	得到 $e^y\,dy=e^x\,dx$，积分 $e^y=e^x+C$，初值使 $C=0$，故 $y=x$。 易错点　代入的是 $e^0=1$。
2013 年 册页 57 第 28 题 21-3	$y'+2xy=2xe^{-x^2}$ 通解 积分因子、一阶线性	积分因子 e^{x^2}，得到 $(e^{x^2}y)'=2x$，所以 $y=(x^2+C)e^{-x^2}$。 易错点　等式右端也要乘积分因子。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2012 年 册页 60 第 19 题 主 21-3；配合或备用 21-2	$y'+xy=y$ 的通解 积分因子、一阶线性	化为 $y'+(x-1)y=0$，乘 $e^{x^2/2-x}$ 后左端为乘积导数，故 $y=Ce^{x-x^2/2}$。 易错点　零解由 $C=0$ 保留。
2012 年 册页 63 第 28 题 21-3	$y'-y=\cos x,\ y(0)=0$ 积分因子、一阶线性	乘 e^{-x} 后积分或代入试验 $y_p=(\sin x-\cos x)/2$，通解 $y=Ce^{x}+y_p$。 易错点　代回可同时检查系数及初值。
2011 年 册页 66 第 19 题 主 21-3；配合或备用 21-2	$y'-y=1$ 的通解 积分因子、一阶线性	令 $z=y+1$ 得 $z'=z$，所以 $y=Ce^{x}-1$。 易错点　常数特解为 -1。
2011 年 册页 69 第 27 题 21-3	含 $\cot x$ 的一阶线性方程 积分因子、一阶线性	在 $\cot x$ 可除的区间，化为 $y'-y\sin x=2xe^{-\cos x}$。 易错点　原式含 $\cot x$，有效区间先按原式确定。
2010 年 册页 72 第 19 题 主 21-2；配合或备用 21-3	$y'=2x(1+y)$ 的通解 变量分离、分支	令 $z=1+y$ 得 $z'=2xz$，于是 $z=Ce^{x^2}$（含零解），所以 $y=Ce^{x^2}-1$。 易错点　分离除以 z 时检查 $z=0$。
2010 年 册页 74 第 27 题 21-3	$xy'+2y=3x$ 的通解 积分因子、一阶线性	在 $x\neq 0$ 上写为 $y'+2y/x=3$，乘 x^2 得 $(x^2y)'=3x^2$，故 $y=x+C/x^2$。 易错点　标准式的区间要避开 0。
2009 年 册页 81 第 28 题 21-3	$y'+y\tan x=\sec x,\ y(0)=0$ 积分因子、一阶线性	在含零的相邻奇点区间乘 $\sec x$，得 $(y\sec x)'=\sec^2 x$。 易错点　检查 $\cos x\neq 0$ 的解区间。
2008 年 册页 84 第 20 题 21-2	$1+y^2-xyy'=0,\ y(1)=0$ 变量分离、分支	在正则区间令 $z=1+y^2$，得 $z'=2z/x$、$z=Cx^2$。 易错点　形式初值与经典初值解须区分。
2008 年 册页 86 第 27 题 21-3	$(x+1)y'-2y=(x+1)^4$ 积分因子、一阶线性	在 $x\neq -1$ 处标准化，积分因子 $(x+1)^{-2}$，故 $[y/(x+1)^2]'=x+1$。 易错点　常规通解先在系数连续的区间写。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2007 年 册页 92 第 25 题 21-3	$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ 的通解 积分因子、一阶线性	乘 $e^{\sin x}$ 后得到 $(ye^{\sin x})'=1$，故 $y=(x+C)e^{-\sin x}$。 易错点　积分因子和右端的指数正好抵消。
2006 年 册页 96 第 20 题 21-2	$\cos y\,dy=\sin x\,dx$ 的通解 变量分离、分支	两边同时积分，得 $\sin y=-\cos x+C$，即 $\sin y+\cos x=C$。 易错点　以隐式给出通解可以保留分支。
2006 年 册页 99 第 27 题 21-3	$xy'-y=1+x^3,\ y(1)=0$ 积分因子、一阶线性	在含 1 的正半轴除以 x^2，得 $(y/x)'=1/x^2+x$。 易错点　分母 x^2 来自商的导数。

22　高阶微分方程的通解与特解形式

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 2 第 10 题 22-2	$y''-y'-12y=0$ 特征方程、根的重数	特征方程 $(r-4)(r+3)=0$，得 $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-3x}$。 易错点　根的符号按方程常数项核对。
2021 年 册页 6 第 9 题 22-2	$y''+5y'+6y=0$ 特征方程、根的重数	$(r+2)(r+3)=0$，故 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$。 易错点　两个实根都为负。
2020 年 册页 12 第 10 题 22-2	$y''+6y'+9y=0$ 特征方程、根的重数	特征根 -3 为二重根，通解 $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$。 易错点　重根需要独立的第二解 xe^{-3x}。
2019 年 册页 18 第 10 题 22-2	$y''+y'-2y=0$ 特征方程、根的重数	因式分解 $(r-1)(r+2)=0$，得 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$。 易错点　两个独立常数。
2017 年 册页 30 第 9 题 主 22-4；配合或备用 22-2	选择 $y''-y'=0$ 的一个特解 代入、恒等验证	候选 e^x 的一、二阶导数相同。 易错点　题目问一个解，原式不要求初始条件。
2016 年 册页 36 第 10 题 22-2	$y''-y=0$ 的通解 特征方程、根的重数	$r^2=1$ 得 ±1 两根，所以 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$。 易错点　两个指数不能合成只有一个常数。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2015 年 册页 42 第 9 题 22-2	$y''+y'-6y=0$ 的通解 特征方程、根的重数	由 $(r+3)(r-2)=0$ 得 $C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$。 易错点　别互换指数的数值和符号。
2014 年 册页 48 第 9 题 22-4	识别 $y=\sin x$ 满足的方程 代入、恒等验证	求 $y'=\cos x$，$y''=-\sin x$，逐候选代入，确认 $y''+y=0$。 易错点　检验恒等于零，而非只在若干点成立。
2013 年 册页 54 第 10 题 22-2	$y''-2y'-3y=0$ 的通解 特征方程、根的重数	$(r-3)(r+1)=0$，得 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$。 易错点　系数的符号只由代数方程来。
2012 年 册页 59 第 9 题 主 22-1；配合或备用 22-4	$y''=\cos x$ 的通解 逐次积分、独立常数	积分一次为 $y'=\sin x+C_1$，再积分为 $y=-\cos x+C_1x+C_2$。 易错点　积分两次产生两个独立常数。
2009 年 册页 78 第 20 题 22-2	$4y''+4y'+y=0$ 的通解 特征方程、根的重数	特征式 $(2r+1)^2=0$，根 $-1/2$ 二重，解 $y=(C_1+C_2x)e^{-x/2}$。 易错点　重复根不是 -1。
2008 年 册页 84 第 10 题 22-2	$y''-3y'-10y=0$ 的通解 特征方程、根的重数	特征式 $(r-5)(r+2)=0$，解 $y=C_1e^{5x}+C_2e^{-2x}$。 易错点　根和为 3，积为 -10。
2007 年 册页 90 第 20 题 22-2	$y''-2y'+y=0$ 的通解 特征方程、根的重数	$(r-1)^2=0$，重根 1，故 $y=(C_1+C_2x)e^x$。 易错点　给重根配 xe^x。
2006 年 册页 96 第 10 题 22-3	$y''-y'-12y=xe^{3x}$ 的待定特解形式 非齐次、特解形式	齐次根 $4,-3$，3 非特征根，无共振； 易错点　只有指数对应特征根时才额外乘 x 的幂。

23　定积分应用：面积、旋转体体积与质量

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2022 年 册页 4 第 23 题 主 23-1；配合或备用 23-2	$y=x^4+1$、$x=0,1$、$y=0$ 的面积与绕 x 轴体积 交点、边界差、面积	在 $0\le x\le 1$，面积 $\int_0^1(x^4+1)dx=6/5$。 易错点　平方的是整条半径。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2021 年 册页 10 第 23 题 主 23-1；配合或备用 23-2	余弦拱形区域的面积与绕 x 轴体积 交点、边界差、面积	在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上 $\cos x\geq 0$。 易错点　区间为完整的一段余弦拱形。
2020 年 册页 16 第 23 题 主 23-1；配合或备用 23-2	$y=x-x^2$ 和 x 轴围成的区域 交点、边界差、面积	交点横坐标 $0,1$，中间曲线在轴上。 易错点　体积的被积函数不是面积被积函数本身。
2019 年 册页 21 第 23 题 主 23-1；配合或备用 23-2	$y=\sqrt{1+x}$ 与 $y=1+x$ 的围成区域 交点、边界差、面积	令 $u=1+x$，交点对应 $u=0,1$，外边界为 $\sqrt{u}$、内边界为 u。 易错点　圆环外半径平方减内半径平方。
2018 年 册页 28 第 24 题 主 23-1；配合或备用 23-2	从原图读 $y=e^x$ 下方阴影区域 交点、边界差、面积	图上标明 $x=0$、$x=1$、x 轴及曲线 $y=e^x$。 易错点　直接从原图辨认上下边界。
2017 年 册页 33 第 23 题 主 23-1；配合或备用 23-2	$x=y^2$ 与 $x=y+2$ 围成区域，绕 y 轴 交点、边界差、面积	两曲线相交于 $y=-1,2$，以 dy 切片，右减左给面积 $\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy=9/2$。 易错点　y^2 作为半径时平方成 y^4。
2016 年 册页 39 第 24 题 主 23-1；配合或备用 23-2	第一象限余弦下面积与体积 交点、边界差、面积	边界为 $x=0$，$y=0$，$y=\cos x$，区间 $[0,\pi/2]$。 易错点　题给区间只有半个拱形。
2015 年 册页 45 第 23 题 主 23-1；配合或备用 23-2	在 $0\leq x\leq 1$，$y=e^x$ 和 $y=x$ 之间 交点、边界差、面积	因 $e^x\geq 1+x$，上界为 e^x。 易错点　圆环保留内半径 x。
2014 年 册页 51 第 23 题 主 23-1；配合或备用 23-2	$y=x$ 与 $y=x^2$ 的围成区域 交点、边界差、面积	交点 $0,1$，上界 x、下界 x^2。 易错点　截面积不是 $\pi(x-x^2)^2$。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2013 年 册页 57 第 29 题 主 23-1；配合或备用 23-2	$y=\sqrt{x}$、$x+y=6$ 和 x 轴围成区域 交点、边界差、面积	曲线交于 $(4,2)$，与轴的外端为 $0,6$。 易错点　边界在 $x=4$ 处更换。
2012 年 册页 63 第 29 题 主 23-1；配合或备用 23-2	$\sqrt{y}=x$，$y=2-x$ 及 x 轴，绕 y 轴 交点、边界差、面积	取水平截线 $0\le y\le 1$，边界 $x=\sqrt{y}$ 和 $x=2-y$，故面积 $\int_0^1(2-y-\sqrt{y})dy=5/6$，体积 $\pi\int_0^1[(2-y)^2-y]dy=11\pi/6$。 易错点　横切用 dy，轴是竖直的。
2011 年 册页 69 第 29 题 23-2	$y=\ln x$、$y=0$、$x=e$ 围成区域，绕 y 轴 圆盘、圆环、旋转体	对 $0\le y\le 1$ 水平切片，外半径 e、内半径 e^y。 易错点　从旋转轴量半径，不能直接平方 $\ln x$。
2010 年 册页 75 第 29 题 主 23-1；配合或备用 23-2	$y=e^x$，$y=2^{-x}$，$x=1$ 围成区域 交点、边界差、面积	两指数曲线交在 $x=0$，在 $[0,1]$ 上以 e^x 为上界。 易错点　2^{-x} 的积分含 $-\ln 2$。
2009 年 册页 82 第 30 题 23-1	由 $y=x^2$ 与 $y=2x+3$ 围成的面积 交点、边界差、面积	交点为 $x=-1,3$，中间直线在上。 易错点　先求交点再列上下差。
2008 年 册页 87 第 29 题 23-1	$y=1/x$，$y=x$，$y=2$ 围成的面积 交点、边界差、面积	封闭区域在第一象限，按 y 切片，$1\le y\le 2$、$1/y\le x\le y$。 易错点　沿 x 切会遇到分段，用 dy 更直接。
2007 年 册页 93 第 29 题 主 23-3；配合或备用 23-1	密度 3 的薄片由 $y=1-x^2$ 与 x 轴围成 面密度、质量	交点 $x=\pm1$。面积 $\int_{-1}^1(1-x^2)dx=4/3$，均匀薄片质量 $3\cdot 4/3=4$。 易错点　质量需乘面密度。
2006 年 册页 99 第 29 题 主 23-1；配合或备用 23-2	对数曲线、切线与 x 轴的面积及体积 交点、边界差、面积	（1）在 $(e,1)$ 切线斜率 $1/e$，得 $y=x/e$。 易错点　下边界在 $x=1$ 改变。

24　实际情境的最优化

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2016 年 册页 39 第 23 题 主 24-1；配合或备用 24-3	销量、售价与成本给定时求最大利润 利润或成本、产量	$p=420-q/2$，$C=30000+100q$，故 $P(q)=320q-q^2/2-30000$。 易错点　收益是 pq、利润是收益减成本。
2015 年 册页 45 第 24 题 主 24-2；配合或备用 24-3	从河岸水厂向两生活区铺管的最低成本 几何约束、目标函数	图中 $BC=2$，$AB=\sqrt{29}$，所以 $AC=5$。 易错点　两段管的单价不同。
2014 年 册页 52 第 24 题 主 24-1；配合或备用 24-3	由收益与成本求产量和最大利润 利润或成本、产量	利润 $P=-2x^3+3x^2+12x-1$，$P'=-6(x-2)(x+1)$，在非负域先增后减。 易错点　负的驻点不在产量范围。
2013 年 册页 58 第 30 题 主 24-2；配合或备用 24-3	定容量无盖圆柱杯，底面单位造价为侧壁两倍 几何约束、目标函数	设半径 r、高 h，$r^2h=16$。 易错点　无盖，只计算一个底面。
2012 年 册页 64 第 30 题 主 24-1；配合或备用 24-3	同一成本函数下求最低平均成本和最大利润 利润或成本、产量	$C=25000+200x+x^2/40$。 易错点　两问优化的是不同目标。
2011 年 册页 70 第 30 题 主 24-2；配合或备用 24-3	容积 2π 的密闭圆柱罐最省料 几何约束、目标函数	$r^2h=2$，总面积 $2\pi r^2+4\pi/r$。 易错点　封闭罐包含上下两个圆面。
2010 年 册页 76 第 30 题 主 24-2；配合或备用 24-3	底边比 $1:2$、体积 72 的带盖长方体最小表面积 几何约束、目标函数	令宽 x、长 $2x$，高 $36/x^2$。 易错点　上下底都要计入。
2009 年 册页 81 第 29 题 主 24-2；配合或备用 24-3	铁丝分围正方形和圆，总面积最小 几何约束、目标函数	令正方形用长 x，圆用 $a-x$。 易错点　使用的是周长，先化成边长或半径。

出处与解法	题意与考点	关键步骤与易错点
2008 年 册页 88 第 30 题 主 24-2；配合或备用 24-3	靠墙围长方形，三面砖墙共 20 米 几何约束、目标函数	两短边各 x，沿墙对面长 $20-2x$，面积 $x(20-2x)$。 易错点　靠墙一侧不耗砖。
2007 年 册页 94 第 30 题 主 24-2；配合或备用 24-3	正方形铁皮剪同样的角后折无盖盒 几何约束、目标函数	剪角边长 x，$0<x<a/2$，体积 $x(a-2x)^2$。 易错点　折起高度是剪角边长，底边两侧都被剪去。

附录二　原文与答案待确认

- **2018 年第 22、23 题（册页 27，`IMG_20261117_182942.jpg`）。**第 22 题初值的下标、第 23 题分子上标等细小符号待确认。建议补拍这两道题的局部正面。
- **2007 年第 21、22 题（册页 91，`IMG_20261117_183329.jpg`）。**第 21 题变上限积分式的指数与趋向下标待确认。第 22 题目标导数的撇号阶次待确认，正文给出高阶导通式。
- **2006 年第 30 题（册页 100，`IMG_20261117_183353.jpg`）。**第 30 题区间端点及被积式细节待确认，正文保留最值比较步骤。第 31 题放大后已恢复关键不等式并给出证明。
- **2008 年第 20 题（册页 84，`IMG_20261117_183307.jpg`）。**册页可读为 $1+y^2-xyy'=0$、$y(1)=0$。在初值点若要求 y 可导且满足方程，代入会得到 $1=0$。原卷条件或勘误待确认，有原卷或配套解析可提供。
- 2008 年第 6、7 题涉及定理条件的解释口径，正文分别交代了严格的数学条件。配套答案或勘误口径待确认。

附录三　逐页出处与覆盖检查

按照片题头和页脚，题源为库课汇编中的 2006–2022 年福建省普通高校专升本招生统一考试《高等数学》试卷。共读取 100 张 JPG，每张以主要拍摄的册页为准。页码为汇编册内页码。对页入镜、背面透印和手写笔记均与正面印刷题目区分。原卷发布版本和配套印刷答案来源待确认。本书的解答均是根据照片可辨的题面推导。选择题以完整数学结论和必要的选项辨析为主。

年份	册页范围	主拍照片文件尾号	连续题号	已主归类
2022	1–4	182731–182747	1–24	24
2021	5–10	182804–182821	1–24	24
2020	11–16	182832–182849	1–24	24
2019	17–22	182851–182923	1–24	24
2018	23–28	182928–182945	1–24	24
2017	29–34	182947–183001	1–24	24
2016	35–40	183009–183028	1–25	25
2015	41–46	183031–183044	1–25	25
2014	47–52	183058–183113	1–25	25
2013	53–58	183115–183129	1–31	31
2012	59–64	183140–183153	1–31	31
2011	65–70	183156–183211	1–31	31
2010	71–76	183216–183228	1–31	31
2009	77–82	183230–183245	1–31	31
2008	83–88	183304–183319	1–31	31
2007	89–94	183321–183334	1–31	31
2006	95–100	183339–183353	1–31	31

批次	已读取册页	核对题号数	已主归类	未归类
2017–2022 年	1–34	144	144	0
2014–2016 年	35–52	75	75	0
2006–2013 年	53–100	248	248	0
合计	**1–100**	**467**	**467**	**0**

以「年份 + 大题号」计数，小问沿用原题号。每个题号有一个主归类。综合题在主章节按小问分析，相关题型以原题号交叉引用。完整评分标准及配套答案来源待确认。

第一批覆盖检查

本批 8 章，共 188 个主归类题号，16 道延伸题。累计覆盖 188 个题号。具体题面疑点均在对应真题条目中标为「待确认」。

第二批覆盖检查

本批 9 章，共 162 个主归类题号，18 道延伸题。累计覆盖 350 个题号。具体题面疑点均在对应真题条目中标为「待确认」。

第三批覆盖检查

本批 7 章，共 117 个主归类题号，14 道延伸题。累计覆盖 467 个题号。具体题面疑点均在对应真题条目中标为「待确认」。

册页	年份	照片文件	题号范围	题型编号及其主归类题号
1	2022	IMG_20261117_182731.jpg	1–7	01（1），03（2），04（3），05（4），06（5），07（6），14（7）
2	2022	IMG_20261117_182734.jpg	8–17	01（11），04（12、17），09（13），11（8），15（14、15），18（9），21（16），22（10）
3	2022	IMG_20261117_182744.jpg	18–21	05（18），08（19），14（20），19（21）
4	2022	IMG_20261117_182747.jpg	22–24	13（24），21（22），23（23）
5	2021	IMG_20261117_182804.jpg	1–5	02（3），03（2），04（4），05（1），07（5）
6	2021	IMG_20261117_182806.jpg	6–16	01（15），04（12），06（7），07（14），10（13），11（6），14（8、11），18（10），21（16），22（9）
7	2021	IMG_20261117_182810.jpg	17–18	04（18），08（17）
8	2021	IMG_20261117_182816.jpg	19–20	15（20），19（19）
9	2021	IMG_20261117_182819.jpg	21–22	05（21），21（22）
10	2021	IMG_20261117_182821.jpg	23–24	13（24），23（23）
11	2020	IMG_20261117_182832.jpg	1–5	02（1），03（2），04（3），07（5），10（4）

册页	年份	照片文件	题号范围	题型编号及其主归类题号
12	2020	IMG_20261117_182835.jpg	6–16	01（11），04（12），07（6、13、14），11（7），14（8），15（15），19（9），20（16），22（10）
13	2020	IMG_20261117_182837.jpg	17–18	04（17），05（18）
14	2020	IMG_20261117_182839.jpg	19–20	08（19），14（20）
15	2020	IMG_20261117_182846.jpg	21–22	19（21），21（22）
16	2020	IMG_20261117_182849.jpg	23–24	13（24），23（23）
17	2019	IMG_20261117_182851.jpg	1–6	02（1、2），03（4），04（3），07（5），14（6）
18	2019	IMG_20261117_182853.jpg	7–17	01（11），04（12、17），07（13），11（7），14（15），15（8），16（14），18（9），21（16），22（10）
19	2019	IMG_20261117_182918.jpg	18–19	05（18），09（19）
20	2019	IMG_20261117_182920.jpg	20–21	14（20），19（21）
21	2019	IMG_20261117_182922.jpg	22–23	21（22），23（23）
22	2019	IMG_20261117_182923.jpg	24	13（24）
23	2018	IMG_20261117_182928.jpg	1–7	02（1），04（2、4），05（3），10（5、6），14（7）
24	2018	IMG_20261117_182931.jpg	8–17	01（11），03（12），04（17），10（13、14），14（15），16（8），18（9），19（16），20（10）
25	2018	IMG_20261117_182933.jpg	18–19	08（18），14（19）
26	2018	IMG_20261117_182935.jpg	20–21	15（20），19（21）
27	2018	IMG_20261117_182942.jpg	22–23	13（23），21（22）
28	2018	IMG_20261117_182945.jpg	24	23（24）
29	2017	IMG_20261117_182947.jpg	1–7	02（1），03（3），04（2），10（6），12（5），13（4），14（7）
30	2017	IMG_20261117_182949.jpg	8–17	04（17），05（11、12），11（13），12（10），15（15），16（14），18（16），19（8），22（9）
31	2017	IMG_20261117_182954.jpg	18–19	07（19），09（18）
32	2017	IMG_20261117_182957.jpg	20–21	15（20），19（21）
33	2017	IMG_20261117_182959.jpg	22–23	21（22），23（23）

册页	年份	照片文件	题号范围	题型编号及其主归类题号
34	2017	IMG_20261117_183001.jpg	24	13（24）
35	2016	IMG_20261117_183009.jpg	1–7	01（1），02（2），03（3），04（5），05（4），07（6），11（7）
36	2016	IMG_20261117_183014.jpg	8–16	01（11），05（12），15（8、14），17（15），18（9），19（16），21（13），22（10）
37	2016	IMG_20261117_183016.jpg	17–19	04（17），08（19），19（18）
38	2016	IMG_20261117_183019.jpg	20–22	11（21），15（20），21（22）
39	2016	IMG_20261117_183026.jpg	23–24	23（24），24（23）
40	2016	IMG_20261117_183028.jpg	25	06（25）
41	2015	IMG_20261117_183031.jpg	1–7	01（1），03（2），04（3），07（4），11（5），12（6），14（7）
42	2015	IMG_20261117_183034.jpg	8–17	04（12、17），05（11），09（13），13（10），15（14），16（16），17（15），18（8），22（9）
43	2015	IMG_20261117_183039.jpg	18–20	05（18），08（19），15（20）
44	2015	IMG_20261117_183041.jpg	21–22	19（21），21（22）
45	2015	IMG_20261117_183043.jpg	23–24	23（23），24（24）
46	2015	IMG_20261117_183044.jpg	25	06（25）
47	2014	IMG_20261117_183058.jpg	1–7	01（1），03（2），04（3），07（5），11（4），12（6），14（7）
48	2014	IMG_20261117_183059.jpg	8–17	01（11），04（12、17），06（10），08（13），10（16），15（14），17（15），18（8），22（9）
49	2014	IMG_20261117_183101.jpg	18–19	05（18），15（19）
50	2014	IMG_20261117_183104.jpg	20–21	09（20），19（21）
51	2014	IMG_20261117_183109.jpg	22–23	21（22），23（23）
52	2014	IMG_20261117_183113.jpg	24–25	13（25），24（24）
53	2013	IMG_20261117_183115.jpg	1–9	01（1），03（3），04（2），05（4），06（5），07（6），14（7），17（8），18（9）

册页	年份	照片文件	题号范围	题型编号及其主归类题号
54	2013	IMG_20261117_183117.jpg	10–21	01（11），04（12、21），06（13），09（14），11（15），12（16），15（18），16（17），19（19），21（20），22（10）
55	2013	IMG_20261117_183123.jpg	22–24	05（22），07（23），08（24）
56	2013	IMG_20261117_183124.jpg	25–27	14（25），15（26），19（27）
57	2013	IMG_20261117_183126.jpg	28–29	21（28），23（29）
58	2013	IMG_20261117_183129.jpg	30–31	12（31），24（30）
59	2012	IMG_20261117_183140.jpg	1–9	01（1），03（2），06（3、4），10（6），12（5），16（7），17（8），22（9）
60	2012	IMG_20261117_183142.jpg	10–21	01（11），04（12、21），07（13、14），09（15），11（16），14（17），15（18），18（10），19（20），21（19）
61	2012	IMG_20261117_183144.jpg	22–24	06（22），08（23、24）
62	2012	IMG_20261117_183147.jpg	25–27	14（25），15（26），19（27）
63	2012	IMG_20261117_183151.jpg	28–29	21（28），23（29）
64	2012	IMG_20261117_183153.jpg	30–31	13（31），24（30）
65	2011	IMG_20261117_183156.jpg	1–6	01（1），02（2），03（3），05（4），06（5），07（6）
66	2011	IMG_20261117_183159.jpg	7–20	01（11），04（12、13），09（14），10（15），11（7），14（8），15（16、18），17（17），18（9、20），20（10），21（19）
67	2011	IMG_20261117_183204.jpg	21–23	05（21），07（23），16（22）
68	2011	IMG_20261117_183206.jpg	24–26	08（24），14（25），15（26）
69	2011	IMG_20261117_183209.jpg	27–29	19（28），21（27），23（29）
70	2011	IMG_20261117_183211.jpg	30–31	12（31），24（30）
71	2010	IMG_20261117_183216.jpg	1–9	01（2），02（1），06（3），07（4），10（5），14（6），16（7），17（8），19（9）
72	2010	IMG_20261117_183218.jpg	10–21	02（11），04（12），05（21），06（14），09（13），11（16），12（15），14（17），15（18），18（20），20（10），21（19）

册页	年份	照片文件	题号范围	题型编号及其主归类题号
73	2010	IMG_20261117_183219.jpg	22–24	08（23、24），16（22）
74	2010	IMG_20261117_183222.jpg	25–27	14（25），15（26），21（27）
75	2010	IMG_20261117_183226.jpg	28–29	19（28），23（29）
76	2010	IMG_20261117_183228.jpg	30–31	12（31），24（30）
77	2009	IMG_20261117_183230.jpg	1–9	01（1），03（2），05（3），06（4、5），07（6），10（8），14（7），18（9）
78	2009	IMG_20261117_183232.jpg	10–21	04（11、12），07（13、14），09（15），11（17），12（16），15（18），16（21），18（19），20（10），22（20）
79	2009	IMG_20261117_183239.jpg	22–24	05（22），08（23、24）
80	2009	IMG_20261117_183240.jpg	25–27	14（25），15（26），19（27）
81	2009	IMG_20261117_183242.jpg	28–29	21（28），24（29）
82	2009	IMG_20261117_183245.jpg	30–31	13（31），23（30）
83	2008	IMG_20261117_183304.jpg	1–8	01（2），02（1），04（6），05（3），06（5），07（4），11（7），16（8）
84	2008	IMG_20261117_183307.jpg	9–21	02（11），04（12、21），05（13），07（14、15），09（16），11（17），15（9、18），18（19），21（20），22（10）
85	2008	IMG_20261117_183310.jpg	22–24	08（22、23），10（24）
86	2008	IMG_20261117_183312.jpg	25–27	14（25），15（26），21（27）
87	2008	IMG_20261117_183318.jpg	28–29	19（28），23（29）
88	2008	IMG_20261117_183319.jpg	30–31	12（31），24（30）
89	2007	IMG_20261117_183321.jpg	1–5	01（1、2），02（5），03（3），06（4）
90	2007	IMG_20261117_183324.jpg	6–20	02（11），04（12），05（13），08（14），09（17），12（6），14（7），15（15、18），16（8），17（19），18（16），19（9），20（10），22（20）
91	2007	IMG_20261117_183329.jpg	21–23	07（22），10（23），16（21）
92	2007	IMG_20261117_183331.jpg	24–26	14（24），15（26），21（25）

册页	年份	照片文件	题号范围	题型编号及其主归类题号
93	2007	IMG_20261117_183332.jpg	27–29	05（28），19（27），23（29）
94	2007	IMG_20261117_183334.jpg	30–31	12（31），24（30）
95	2006	IMG_20261117_183339.jpg	1–6	02（1），04（2），05（3），06（6），07（5），09（4）
96	2006	IMG_20261117_183341.jpg	7–20	01（11），04（12），07（13、14），10（15），11（7），14（8、16），15（9、19），16（17），19（18），21（20），22（10）
97	2006	IMG_20261117_183344.jpg	21–23	04（21），07（22），08（23）
98	2006	IMG_20261117_183346.jpg	24–26	10（24），14（25），15（26）
99	2006	IMG_20261117_183350.jpg	27–29	19（28），21（27），23（29）
100	2006	IMG_20261117_183353.jpg	30–31	10（30），12（31）